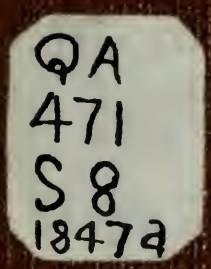
UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 01080891 3


QA
471
S8
1847a

Geometrie der Lage

von

Dr. Georg Karl Christian von Staudt,

ord. Professor an der Universität in Erlangen.

Nürnberg,

Verlag der Friedr. Korn'schen Buchhandlung.

513.5
S79

QA
471
S8
1847a
LIBRARY
MAR 18 1954
UNIVERSITY OF TORONTO
887494

Reproduced by
DUOPAGE PROCESS
in the
U.S. of America

Micro Photo Division
Bell & Howell Company
Cleveland 12, Ohio

Vorwort.

Man hat in den neuern Zeiten wohl mit Recht die Geometrie der Lage von der Geometrie des Masses unterschieden, indessen gleichwohl Sätze, in welchen von keiner Grösse die Rede ist, gewöhnlich durch Betrachtung von Verhältnissen bewiesen. Ich habe in dieser Schrift versucht, die Geometrie der Lage zu einer selbstständigen Wissenschaft zu machen, welche des Messens nicht bedarf. Um jedoch diejenigen Eigenschaften der Curven und Flächen II. Ordnung, welche auf Mittelpunkte, Axen, Brennpunkte u. s. w. sich beziehen, nicht ganz unberührt zu lassen, habe ich das Wesentliche hievon in einen Anhang aufgenommen.

Jeder geometrische Unterricht muss von allgemeinen Betrachtungen ausgehen, welche den Schüler mit den verschiedenen Arten von geometrischen Gebilden bekannt machen und sein Anschauungsvermögen üben. Die meisten Lehrbücher der Geometrie gehen aber zu bald zum Besondern, nämlich zur Congruenz und Aehnlichkeit der Dreiecke über, daher sie auch manche Begriffe nicht in der gehörigen Allgemeinheit aufstellen. Aehnliche ebene Figuren sind nichts anderes als homologe Stücke von ähnlichen ebenen Systemen, ähnliche Körper aber homologe Stücke von ähnlichen räumlichen Systemen. Der Betrachtung von centrischen Figuren sollte die des centrischen ebenen Systems und der Betrachtung von symmetrischen Figuren die des symmetrischen ebenen Systems

2189

vorangeschickt werden. Uebrigens ist in vielen Lehrbüchern der Geometrie, obgleich Natur und Kunst in allen ihren Gebilden nach Symmetrie streben, dieser Begriff gar nicht entwickelt.

Wenn es für den Geübtern keine Uebung mehr ist, zu dem einen von zwei reciproken Sätzen den andern zu suchen, so ist dieses doch für den Anfänger eine zweckmässige Aufgabe, welche ihn veranlasst, durch einige Thätigkeit Gebilde zur Anschauung zu bringen. Dass aber das Gesetz der Reciprocität jeden für die Geometrie empfänglichen Schüler mehr anrege, als irgend ein einzelner Satz, wird jeder Lehrer erfahren, der seine Schüler auf dasselbe aufmerksam macht. Vielleicht wird diese Schrift einige Lehrer bestimmen, ihrem Unterrichte in der Geometrie des Masses das Wesentliche aus der Geometrie der Lage voranzuschicken, damit ihre Schüler gleich Anfangs denjenigen Ueberblick über die Wissenschaft gewinnen, ohne welchen das rechte Verständniss der einzelnen Sätze und ihrer Beziehung zum Ganzen nicht wohl möglich ist.

Erlangen, im August 1847.

Der Verfasser.

Inhalt.

		Seite
§. 1.	Einleitung. Der Strahlenbündel. Winkelräume und Winkelflächen	1 — 7
§. 2.	Die Ebene. Der Strahlenbüschel und der Ebenenbüschel	7 — 12
§. 3.	Von den Parallelen	13 — 18
§. 4.	Von den nEcken, nKanten und Polyedern	18 — 23
§. 5.	Unendlich ferne Elemente	23 — 30
§. 6.	Gesetz der Reciprocität	30 — 36
§. 7.	Von den nEcken, nKanten u. s. w. in einer andern Bedeutung	36 — 43
§. 8.	Harmonische Gebilde	43 — 49
§. 9.	Projektivische Verwandtschaft zwischen einförmigen Gebilden	49 — 60
§. 10.	Projektivische Verwandtschaft zwischen Grundgebilden der zweiten Stufe und zwischen räumlichen Systemen	60 — 72
§. 11.	Von den Linien, Flächen und den ihnen verwandten Gebilden	72 — 81
§. 12.	Eintheilung der geschlossenen Linien, Flächen u. s. w. in solche von parer und in solche von unparer Ordnung	81 — 89

Seite

§. 13. Von den ebenen Figuren und den ihnen verwandten Gebilden . . . . . 90 — 100
§. 14. Von den Körpern und den ihnen verwandten Gebilden 100 — 109
§. 15. Rückkehrelemente . . . . . 110 — 118
§. 16. Involutionen . . . . . 118 — 125
§. 17. Involutorische Systeme . . . . . 125 — 131
§. 18. Polarsysteme in der Ebene und im Strahlenbündel 131 — 137
§. 19. Curven und Kegelflächen II. Ordnung . . . . . 137 — 148
§. 20. Projektivische Beziehungen zwischen Curven II. Ordnung . . . . . 149 — 164
§. 21. Von der Anzahl der gemeinschaftlichen Punkte und Tangenten zweier Curven II. Ordnung . . . . . 165 — 172
§. 22. Von den Linien II. Ordnung überhaupt . . . . . 172 — 178
§. 23. Aufgaben vom zweiten Grade . . . . . 178 — 189
§. 24. Polarsysteme im Raume . . . . . 190 — 197
§ 25. Flächen II. Ordnung . . . . . 197 — 203
Anhang . . . . . 203 — 216

Geometrie der Lage.

§. 1.

Einleitung. Der Strahlenbündel. Winkelräume und Winkelflächen.

1. Die Geometrie geht von der Vorstellung eines unbegrenzten Raumes aus; ein vollständig begrenztes Stück desselben heisst ein Körper.

Körper und überhaupt körperliche Räume werden durch Flächen, Flächen durch Linien, Linien durch Punkte getheilt und begrenzt. Oberfläche eines Körpers ist die Fläche, welche ihn einschliesst, oder der Inbegriff der Flächen, welche ihn begrenzen.

Jede Fläche hat zwei Seiten; dasselbe kann von jeder Linie in einer Fläche, so wie auch von jedem Punkte in einer Linie gesagt werden.

2. Ein Punkt ist untheilbar. Bewegt sich ein Punkt, so beschreibt er eine Linie; durch die Bewegung einer Linie kann eine Fläche, durch die Bewegung einer Fläche ein körperlicher Raum erzeugt werden. Eine Linie geht durch jeden in ihr liegenden Punkt, eine Fläche aber durch alle in ihr liegenden Punkte und Linien.

Körperliche Räume, Flächen, Linien, Punkte und Zusammensetzungen aus denselben sind geometrische Gebilde. Unter einer Figur versteht man gewöhnlich eine vollständig begrenzte Fläche. Umfang einer Figur ist die Linie, welche sie einschliesst, oder der Inbegriff der Linien, welche sie begrenzen.

3. Jeder Punkt einer geschlossenen (in sich zurückkehrenden) Linie kann als Anfang und Ende derselben betrachtet werden. Beschreibt ein Punkt eine geschlossene Linie, welcher die drei Punkte A, B, C angehören, so muss er entweder im Sinne ABC,

welcher mit dem von BCA oder CAB ganz einerlei ist, oder in dem dem erstern entgegengesetzten Sinne, welcher durch BAC oder ACB oder CBA angezeigt werden kann, sich bewegen.

Werden in einer Linie, welche sich nicht schliesst, drei Punkte angenommen, so sind die beiden äussern durch den mittlern getrennt. Unter vier Punkten einer geschlossenen Linie sind zwei Paar getrennte.

4. Von einer Fläche und einer Linie, welche durch einen und denselben Punkt gehen, sagt man, dass sie in diesem Punkte sich $\left\{\begin{matrix}\text{berühren}\\\text{schneiden}\end{matrix}\right\}$, wenn die ihm zunächstliegenden Theile der Linie auf $\left\{\begin{matrix}\text{einerlei}\\\text{entgegengesetzten}\end{matrix}\right\}$ Seite(n) der Fläche liegen. Werden in einem körperlichen Raume, welcher durch eine Fläche in zwei Theile getheilt ist, zwei ausserhalb dieser Fläche befindliche Punkte durch eine Linie verbunden, so schneidet diese die Fläche parmal (gar nicht oder zweimal oder viermal u. s. w.) oder unparmal, je nachdem jene Punkte auf einerlei oder entgegengesetzten Seiten derselben liegen.

5. Zwei Linien, welche in einer und derselben Fläche liegen und durch einen und denselben Punkt gehen, $\left\{\begin{matrix}\text{berühren}\\\text{schneiden}\end{matrix}\right\}$ sich in diesem Punkte, wenn die ihm zunächstliegenden Theile einer jeden von den beiden Linien auf $\left\{\begin{matrix}\text{einerlei}\\\text{entgegengesetzten}\end{matrix}\right\}$ Seite(n) der andern liegen. Werden in einer Fläche, welche durch eine Linie in zwei Theile getheilt ist, zwei ausserhalb dieser Linie befindliche Punkte durch eine andere Linie verbunden, so schneidet diese die erstere parmal oder unparmal, je nachdem jene Punkte auf einerlei oder entgegengesetzten Seiten derselben liegen.

Eine Linie kann auch sich selbst schneiden oder berühren und daher ein zweien Linien gemeinschaftlicher Punkt ein vielfacher (öfter als einmal zu zählender) Schnitt- oder Berührungspunkt oder auch beides zugleich seyn.

6. Zwei Flächen, welche durch eine und dieselbe Linie gehen, $\left\{\begin{matrix}\text{berühren}\\\text{schneiden}\end{matrix}\right\}$ sich in dieser Linie, wenn die ihr zunächstliegenden

Theile einer jeden von den beiden Flächen auf {einerlei / entgegengesetzten} Seite(n) der andern liegen. Zwei Flächen berühren sich in einem Punkte, durch welchen beide gehen, wenn der zunächst um ihn herum liegende Theil einer jeden von den beiden Flächen ganz auf einerlei Seite der andern liegt.

Wenn eine Linie, welche in der einen von zwei sich schneidenden Flächen liegt, die Schnittlinie derselben in einem Punkte {schneidet / berührt}, so {schneidet / berührt} sie in demselben Punkte auch die andere Fläche. Berühren sich zwei Flächen in einem Punkte oder in einer Linie, so wird auch jede von den beiden Flächen von allen Linien berührt, welche in der andern liegen und durch den Berührungspunkt oder einen Punkt der Berührungslinie gehen.

7. Eine Linie, welche, wenn sie in zwei Punkten festgehalten ist, ihre Lage nicht ändern kann, heisst gerade. Eine Linie heisst gebrochen, wenn sie aus geraden Linien zusammengesetzt ist, ohne gerade zu seyn; — krumm, wenn kein Theil derselben gerade ist; — gemischt, wenn sie aus geraden und krummen Linien zusammengesetzt ist.

Ein gerades Gebilde ist im Allgemeinen der Inbegriff von allen Punkten (Elementen), welche eine Gerade (unbegrenzte gerade Linie) erfüllen, und von welchen man annehmen kann, dass jeder seine Stelle in der Geraden, auch wenn diese bewegt wird, unverrückt beibehalte. Ein gerades Gebilde im engern Sinne besteht aus einzelnen Punkten oder auch Stücken einer Geraden.

Eine Fläche, welche durch die Bewegung einer Geraden erzeugt werden kann, heisst eine Regelfläche.

8. Zwischen je zwei Punkten ist eine von ihnen begrenzte, durch je zwei Punkte eine unbegrenzte gerade Linie möglich. Zwei Gerade können hiernach, wenn sie nicht ganz in einander fallen sollen, höchstens einen Punkt gemein haben. Ist ein nicht gerades Gebilde nur in zwei Punkten festgehalten, so kann es noch um die durch diese beiden Punkte bestimmte Gerade gedreht werden.

Eine Gerade wird, wenn sie als Element erscheint, auch ein Strahl genannt und durch jeden in ihr angenommenen Punkt in

zwei Halbstrahlen getheilt, welche eine gemeinschaftliche Spitze aber entgegengesetzte Richtungen haben, und von welchen jeder die Ergänzung des andern heissen soll.

Aus einem gegebenen Mittelpunkte A wird ein anderer Punkt B durch den Strahl AB projicirt, welcher durch beide Punkte geht. Der Halbstrahl AB projicirt den Punkt B aus der Spitze A.

9. Ein Strahlenbündel ist der Inbegriff von allen Strahlen, welche durch einen und denselben Punkt (Mittelpunkt) denkbar sind. Der Inbegriff von allen nur denkbaren Halbstrahlen, welche einen und denselben Punkt zur gemeinschaftlichen Spitze haben, soll ein Halbstrahlenbündel heissen. Bei einem Gebilde der erstern Art werden Strahlen, bei einem Gebilde der letztern Art aber Halbstrahlen als Elemente betrachtet.

10. Ein einfacher Winkelraum ist ein Theil von einem Halbstrahlenbündel und also so beschaffen, dass jeder Halbstrahl, welcher mit ihm (dem einfachen Winkelraume) einerlei Spitze hat und durch irgend einen Punkt in ihm geht, ganz in denselben fällt. Eine Fläche, welche die erwähnte Eigenschaft hat, welche man also von Halbstrahlen, die eine gemeinschaftliche Spitze haben, erfüllt sich denken kann, soll eine einfache Winkel- oder Kegelfläche heissen.

Einfache Winkelräume werden durch einfache Winkelflächen, einfache Winkelflächen durch Halbstrahlen begrenzt. Die Grenze eines Winkelraumes nennt man seinen Mantel, die Grenzen einer Winkelfläche aber ihre Schenkel.

Bewegt sich ein Halbstrahl um seine Spitze als festen Punkt, so beschreibt er eine einfache Winkelfläche. Jeder Halbstrahl in einer geschlossenen einfachen Winkelfläche kann als Anfang und Ende derselben betrachtet werden, daher unter vier Elementen einer solchen Fläche nur zwei Paar getrennte sind.

11. Wenn einfache Winkelflächen, welche eine gemeinschaftliche Spitze haben, sich schneiden oder berühren, so geschieht solches in Halbstrahlen. Würde gesagt, dass zwei geschlossene einfache Winkelflächen, welche nur die Spitze mit einander gemein haben, in diesem Punkte sich berühren, so würden nicht mehr Halbstrahlen sondern Punkte als Elemente der beiden Flächen betrachtet werden.

Werden in einem Halbstrahlenbündel, welcher durch eine einfache Winkelfläche in zwei Theile getheilt ist, zwei ausserhalb dieser Fläche liegende Halbstrahlen durch eine andere einfache Winkelfläche verbunden, so schneidet diese die erstere parmal oder unparmal, je nachdem jene Halbstrahlen auf einerlei oder entgegengesetzten Seiten derselben liegen. Zwei geschlossene einfache Winkelflächen, welche eine gemeinschaftliche Spitze haben, schneiden sich also parmal.

12. Zwei einfache Winkel {räume / flächen} sollen Scheitel {räume / flächen} zu einander heissen, wenn jeder Halbstrahl, welcher dem einen von den beiden Gebilden angehört, seine Ergänzung im andern findet. Die Mäntel von Scheitelräumen sind Scheitelflächen zu einander. Jeder einfache Winkelraum, welcher ganz ausserhalb seines Scheitelraumes liegt, ohne dass der Mantel des einen den Mantel des andern berührt, heisst auch ein Halbstrahlenkegel.

13. Ein vollkommner Winkelraum ist ein Theil von einem Strahlenbündel und also so beschaffen, dass jeder Strahl, welcher mit ihm (dem vollkommnen Winkelraume) einerlei Mittelpunkt hat und durch irgend einen Punkt in ihm geht, ganz in denselben fällt. Eine Fläche, welche die erwähnte Eigenschaft hat, welche man also von Strahlen, die einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt haben, erfüllt sich denken kann, soll eine vollkommne Winkel- oder Kegelfläche heissen.

Vollkommne Winkelräume werden durch vollkommne Winkelflächen, vollkommne Winkelflächen durch Strahlen begrenzt. Bewegt sich ein Strahl um seinen Mittelpunkt als festen Punkt, so beschreibt er eine vollkommne Winkelfläche. Unter vier Elementen einer geschlossenen vollkommnen Winkelfläche sind nur zwei Paar getrennte.

14. Ein vollkommner Winkelraum, welcher aus zwei Halbstrahlenkegeln (Scheitelkegeln) besteht, von welchen aber, wenn Strahlen als Elemente betrachtet werden, nur wie von einem Raume gesprochen wird, heisst auch ein Strahlenkegel. Von jedem Strahle, welcher mit einem Strahlenkegel einerlei Mittelpunkt hat, aber nicht im Mantel desselben liegt, kann man sagen, dass

er ganz auf einerlei, nämlich entweder der innern oder äussern Seite dieser Fläche liege.

Vollkommne Winkelflächen, welche einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt haben (concentrisch sind), schneiden und berühren sich in Strahlen. Werden zwei Strahlen, welche mit einem Strahlenkegel einerlei Mittelpunkt haben, aber nicht im Mantel desselben liegen, durch eine vollkommne Winkelfläche verbunden, so schneidet diese die erstere parmal oder unparmal, je nachdem jene Strahlen auf einerlei oder entgegengesetzten Seiten derselben liegen.

15. Eine vollkommne Winkelfläche heisst von parer Ordnung, wenn sie aus zwei geschlossenen einfachen Winkelflächen (Scheitelflächen) besteht, und also ein Strahl, welcher die Fläche beschreibt, zuletzt wieder in seine anfängliche Lage kommt; — von unparer Ordnung aber, wenn sie zugleich als eine einfache Winkelfläche betrachtet werden kann, und also ein Strahl, welcher die Fläche beschreibt, zuletzt in eine der anfänglichen entgegengesetzte Lage kommt, nämlich mit Verwechslung seiner beiden Hälften die ursprüngliche Stelle wieder einnimmt. Von der Ordnung einer Winkelfläche kann nur gesprochen werden, wenn die Fläche eine geschlossene vollkommne Winkelfläche ist.

Eine Winkelfläche $\left\{\begin{matrix}\text{parer}\\ \text{unparer}\end{matrix}\right\}$ Ordnung, welche sich selbst schneidet oder berührt, kann als der Inbegriff von zwei oder mehreren geschlossenen vollkommnen Winkelflächen betrachtet werden, von welchen keine öfter als einmal durch einen und denselben Strahl geht, und unter welchen eine $\left\{\begin{matrix}\text{pare}\\ \text{unpare}\end{matrix}\right\}$ Anzahl von Winkelflächen unparer Ordnung sich befindet.

16. Durch eine Kegelfläche parer Ordnung, welche sich selbst weder schneidet noch berührt, wird ein Strahlenbündel in zwei Theile getheilt, von welchen der eine ein Strahlenkegel ist, während im andern unendlich viele Winkelflächen unparer Ordnung denkbar sind.

Durch eine Winkelfläche unparer Ordnung, welche sich selbst weder schneidet noch berührt, wird ein Strahlenbündel nicht getheilt, indem kein Strahl desselben von einem andern durch die

Fläche getrennt ist. Ein Halbstrahlenbündel wird durch eine Fläche der erwähnten Art in ein Paar Scheiteiräume getheilt, welche einen gemeinschaftlichen Mantel haben, daher die beiden Hälften eines jeden Strahles, welcher der Fläche nicht angehört, aber durch ihren Mittelpunkt geht, auf entgegengesetzten Seiten derselben liegen, und jede einfache Winkelfläche, welche zwei solche Halbstrahlen zu Schenkeln hat, die erstere unparmal schneidet.

Da eine Winkelfläche unparer Ordnung als einfache Winkelfläche betrachtet, durch jeden in ihr liegenden Strahl in ein Paar Scheitelflächen getheilt wird, und also die beiden Hälften eines jeden andern Strahles der Fläche auf entgegengesetzten Seiten des erstern liegen, so wird überhaupt von zwei Geraden, welche durch einen und denselben Punkt gehen, gesagt, dass sie in diesem Punkte sich schneiden.

17. Zwei geschlossene vollkommne Winkelflächen, welche einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt haben, schneiden sich parmal, wenn entweder beide von parer Ordnung sind, oder die eine von parer und die andere von unparer Ordnung ist; — unparmal aber, wenn beide von unparer Ordnung sind. Folgt aus 15 und 16.

---

§. 2.

Die Ebene. Der Strahlenbüschel und der Ebenenbüschel.

18. Eine Ebene ist eine Winkelfläche unparer (erster) Ordnung, in welcher jeder Punkt als Mittelpunkt betrachtet werden kann.

Geht also eine Gerade durch zwei Punkte einer Ebene, so fällt sie ganz in dieselbe. Von einer nicht in ihr liegenden Geraden kann hiernach eine Ebene höchstens einen Punkt enthalten.

Haben eine Ebene und eine ausserhalb derselben liegende Gerade einen Punkt gemein, so (16) schneiden sie sich in diesem Punkte, welcher die Spur der Geraden in der Ebene oder auch die Spur der Ebene in der Geraden heisst.

19. Durch zwei Punkte und also auch durch eine Gerade sind unendlich viele Ebenen denkbar. Durch drei Punkte, welche

nicht in einer und derselben Geraden liegen, also auch durch eine Gerade und einen ausserhalb derselben befindlichen Punkt, so wie auch durch zwei sich schneidende Gerade ist eine Ebene möglich. Von der Ebene, welche eine Gerade a mit einem ausserhalb derselben befindlichen Punkte P verbindet, soll gesagt werden, dass sie aus der Axe a den Punkt P oder aus dem Mittelpunkte P die Gerade a projicire.

Wird eine Ebene um eine in ihr liegende Gerade als feste Axe gedreht, bis sie mit Verwechslung ihrer beiden Hälften (der beiden Halbebenen) die ursprüngliche Stelle wieder einnimmt, so fällt sie nach und nach mit jeder durch jene Gerade gehenden Ebene zusammen.

20. Eine Winkelfläche $\left\{\begin{matrix}\text{parer}\\\text{unparer}\end{matrix}\right\}$ Ordnung wird (17) von einer jeden durch ihren Mittelpunkt gehenden Ebene $\left\{\begin{matrix}\text{parmal}\\\text{unparmal}\end{matrix}\right\}$ geschnitten; die Schnittlinien sind Strahlen. Eine geschlossene einfache Kegelfläche wird von einer jeden durch ihre Spitze gehenden Ebene parmal geschnitten.

Zwei Ebenen, welche durch einen und denselben Punkt gehen, schneiden sich in einer Geraden, welche ebenfalls durch jenen Punkt geht, ausserhalb welcher aber (19) die beiden Ebenen keinen Punkt mit einander gemein haben. Drei Ebenen, welche durch einen und denselben Punkt gehen, schneiden sich entweder in einer Geraden oder in drei Geraden. Im letztern Falle haben die drei Ebenen ausser jenem Punkte, welcher ihr Schnittpunkt heisst, weil in ihm jede der Ebenen die Schnittlinie der beiden übrigen schneidet, keinen Punkt mit einander gemein.

21. Jedes Gebilde, welches ganz in einer und derselben Ebene liegt, wird ein ebenes Gebilde, jedes Stück einer Ebene, so wie auch die Ebene selbst, eine ebene Fläche genannt. Eine Fläche heisst gebrochen, wenn sie aus ebenen Flächen zusammengesetzt ist, ohne eben zu seyn; — krumm, wenn kein Theil derselben eben ist; — gemischt, wenn sie aus ebenen und krummen Flächen zusammengesetzt ist.

Eine krumme Linie (Curve) heisst einfach gekrümmt, wenn sie ganz in einer und derselben Ebene liegt; — doppelt gekrümmt aber, wenn es keine Ebene giebt, welche durch alle

Punkte der Linie geht. Gewöhnlich versteht man unter einer doppelt gekrümmten oder gewundenen Curve eine Linie, von welcher kein Stück eben ist.

22. Der Inbegriff von allen Strahlen, welche einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt haben und in einer und derselben Ebene liegen, heisst ein Strahlenbüschel. Ein Halbstrahlenbüschel ist der Inbegriff von allen Halbstrahlen, welche von einem und demselben Punkte ausgehen und in einerlei Ebene liegen. Bei einem Gebilde der erstern Art erscheint die Ebene als eine vollkommne, bei einem Gebilde der letztern Art aber als eine einfache Winkelfläche. Unter vier Elementen eines Gebildes der einen oder andern Art sind nur zwei Paar getrennte.

Jede von zwei Schenkeln begrenzte ebene Winkelfläche heisst auch ein ebener Winkel. Ein Halbstrahlenbüschel wird durch n Halbstrahlen in n einfache, ein Strahlenbüschel durch n Strahlen in n vollkommne ebene Winkel getheilt. Jede gebrochene $\left\{\begin{matrix}\text{einfache}\\\text{vollkommne}\end{matrix}\right\}$ Winkelfläche ist aus $\left\{\begin{matrix}\text{einfachen}\\\text{vollkommnen}\end{matrix}\right\}$ ebenen Winkeln zusammengesetzt. Unter einer Kegelfläche versteht man gewöhnlich eine krumme Winkelfläche.

23. Der Inbegriff von allen Ebenen (Elementen), welche durch eine und dieselbe Gerade (Axe) denkbar sind, heisst ein Ebenenbüschel. Alle Halbebenen (Elemente), welche von einer und derselben Geraden (Kante) begrenzt sind, bilden einen Halbebenenbüschel.

Ein einfacher Flächenwinkel ist ein Theil von einem Halbebenenbüschel und also so beschaffen, dass jede Halbebene, welche von seiner Kante begrenzt ist und durch irgend einen Punkt in ihm geht, ganz in denselben fällt. Man kann einen solchen Winkel auch als einen einfachen Winkelraum betrachten, dessen Mantel aus zwei Halbebenen zusammengesetzt ist. Ein vollkommner Flächenwinkel ist ein Theil von einem Ebenenbüschel oder ein von zwei Ebenen begrenzter vollkommner Winkelraum. Die beiden Grenzen eines Flächenwinkels heissen seine Schenkel.

Ein Halbebenenbüschel wird durch n Halbebenen in n einfache, ein Ebenenbüschel aber durch n Ebenen in n vollkommne Flächen-

winkel getheilt. Unter vier Elementen eines Büschels der einen oder andern Art sind nur zwei Paar getrennte.

24. Ein einfacher Winkel heisst hohl, wenn die Ergänzungen seiner Schenkel ausserhalb desselben liegen; — flach oder auch gestreckt, wenn seine Schenkel zu einer Geraden oder Ebene sich ergänzen; — erhaben, wenn er die Ergänzungen seiner Schenkel in sich enthält. Die Schenkel eines flachen Winkel sind zugleich die Schenkel seines Scheitelwinkels. Durch zwei seiner Elemente wird ein Halbstrahlen- oder Halbebenenbüschel entweder in zwei gestreckte oder in einen hohlen und einen erhabenen Winkel getheilt.

Ein hohler ebener Winkel kann von einer durch seine Spitze gehenden Ebene höchstens in einem Halbstrahle und also nur dann geschnitten werden, wenn seine Schenkel auf entgegengesetzten Seiten der Ebene liegen. Der Schnitt eines hohlen Flächenwinkels mit einer Ebene, welche seine Kante und also auch seine beiden Schenkel schneidet, ist ein hohler ebener Winkel.

25. Zwei hohle Winkel heissen Nebenwinkel zu einander, wenn sie einen Schenkel gemein haben und ihre beiden übrigen Schenkel zu einer Geraden oder Ebene sich ergänzen.

Ein Strahlen- oder auch Ebenenbüschel wird durch zwei Elemente a, b in zwei vollkommne Winkel ab, a·b getheilt, welche Nebenwinkel zu einander heissen sollen. Unter den vier einfachen Winkeln, aus welchen zwei solche Winkel bestehen, sind vier Paar Nebenwinkel und zwei Paar Scheitelwinkel.

Sind a, b, c drei Elemente eines Büschels, so ist der Winkel ab, welcher das Element c nicht in sich enthält, im Sinne abc, welcher mit dem von bca oder cab ganz einerlei ist, der Winkel a·b aber, welcher das Element c in sich enthält, in dem dem erstern entgegengesetzten Sinne, welcher durch acb oder cba oder bac angedeutet werden kann, beschrieben.

26. Das gerade Gebilde, der Strahlenbüschel (oder auch Halbstrahlenbüschel) und der Ebenenbüschel (oder auch Halbebenenbüschel) sollen die einförmigen Grundgebilde oder die Grundgebilde der ersten Stufe heissen. Der Punkt kommt im geraden Gebilde, die Ebene aber im Ebenenbüschel als Element vor. Die

Gerade, welche zwischen Punkt und Ebene gleichsam die Mitte hält, erscheint im Strahlenbüschel als Element, während sie am geraden Gebilde der Träger von Punkten und am Ebenenbüschel die Schnittlinie von Ebenen ist.

27. Häufig wird ein Gebilde in einem Büschel, wenn es auch nur aus einzelnen Elementen des vollständigen Büschels besteht, selbst ein Büschel genannt. Indessen soll solches in der Folge nur geschehen, wenn durch nähere Angaben jede Zweideutigkeit beseitigt ist.

Ein aus vier Punkten bestehendes gerades Gebilde A B C D wird aus einem ausserhalb der Geraden befindlichen Punkte durch einen Strahlenbüschel a b c d projicirt, welcher aus vier Strahlen besteht, und von welchem das gerade Gebilde A B C D ein Schnitt ist. Das gerade Gebilde B A D C, welches vom ersten wohl zu unterscheiden ist, wird durch den Büschel b a d c, das gerade Gebilde C A D B durch den Büschel c a d b projicirt. Auf diese Weise muss allgemein, wenn für das eine von zwei Gebilden, welche auf einander bezogen sind, eine Permutation desselben gesetzt wird, auch die ihr entsprechende Permutation mit dem andern vorgenommen werden, wenn die vorige Beziehung noch fortbestehen soll.

28. Da in einem Strahlenbündel unendlich viele Strahlenbüschel oder Ebenen enthalten sind, alle Ebenen aber, welche einen Strahl mit einander gemein haben, einen Ebenenbüschel bilden, so erscheinen in einem Strahlenbündel nicht nur Strahlen sondern auch Ebenen als Elemente, obgleich das Gebilde gewöhnlich nach den Elementen der erstern Art genannt wird. Eben so enthält ein Halbstrahlenbündel nicht nur unendlich viele Halbstrahlenbüschel sondern auch unendlich viele Halbebenenbüschel.

Eine Ebene soll, in so ferne unendlich viele gerade Gebilde und Strahlenbüschel in ihr enthalten sind, auch ein ebenes System heissen. Das ebene System und der Strahlenbündel (oder auch Halbstrahlenbündel) sind die Grundgebilde der zweiten Stufe. Es entsprechen ihnen zwei besondere Theile der Geometrie, nämlich die Geometrie der Ebene und die des Strahlenbündels. Der Strahlenbüschel erscheint im ebenen Systeme als der Inbegriff von allen Geraden, welche durch einen und denselben Punkt ge-

hen, im Strahlenbündel aber als der Inbegriff von allen Geraden, welche in einerlei Ebene liegen.

Das Grundgebilde der dritten Stufe ist das räumliche System oder der unbegrenzte Raum, in welchem unendlich viele Grundgebilde der ersten und zweiten Stufe denkbar sind. Jede Ebene ist der Träger eines ebenen Systems, jeder Punkt der Mittelpunkt eines Strahlenbündels, jede Gerade der Träger eines geraden Gebildes und die Axe eines Ebenenbüschels.

29. Wenn zwei Linien aus einem als Spitze angenommenen Punkte durch eine und dieselbe einfache Winkelfläche projicirt werden, so sagt man, dass die beiden Linien von jenem Standpunkte aus betrachtet nur eine und dieselbe Linie zu seyn scheinen oder dem Scheine nach einerlei seyen. Ein Gebilde im Halbstrahlen- oder auch Strahlenbündel soll daher ein Schein von einem andern Gebilde heissen, wenn jedes Element des erstern Gebildes aus seiner Spitze oder seinem Mittelpunkte ein Element des letztern projicirt, und jedes Element des letztern durch ein Element des erstern projicirt wird.

Der Schein einer begrenzten geraden Linie, aus einer nicht in derselben Geraden befindlichen Spitze genommen, ist ein hohler ebener Winkel, welchen die gerade Linie spannt. Der Schein einer ebenen Figur, aus einem ausserhalb der Ebene befindlichen Mittelpunkte genommen, ist ein Strahlenkegel, von welchem die ebene Figur ein Schnitt ist.

30. Der Schein einer unbegrenzten geraden Linie, aus einer nicht in ihr liegenden Spitze genommen, ist ein flacher ebener Winkel. Der Winkel kann nämlich nicht erhaben seyn, weil jedes Element desselben die Gerade schneidet und also keine zwei seiner Elemente zu einem Strahle sich ergänzen. Der Winkel kann aber auch nicht hohl seyn, weil, was als Grundsatz angenommen werden darf, eine Gerade oder ein flacher ebener Winkel nicht ganz in einem hohlen ebenen Winkel liegen kann.

Da die Schenkel des Winkels als Grenzen desselben die Gerade nicht schneiden, so folgt, dass jeder Strahlenbüschel, welcher mit einer Geraden in einerlei Ebene liegt, aber seinen Mittelpunkt ausserhalb der Geraden hat, einen Strahl enthält, welcher die Gerade nicht schneidet.

§. 3.

Von den Parallelen.

31. Zwei Gerade, welche in einerlei Ebene liegen, ohne sich zu schneiden, heissen zu einander parallel. Der zwischen zwei solchen Geraden (Schenkeln) liegende Theil einer Ebene soll ein Parallelstreifen heissen.

Zwei in einerlei Ebene liegende Gerade müssen entweder sich schneiden oder zu einander parallel seyn. Wenn zwei Gerade sich nicht schneiden, so sind sie entweder zu einander parallel oder sie liegen nicht in einerlei Ebene, je nachdem nämlich eine Ebene, welche die eine von den beiden Geraden mit irgend einem Punkte der andern verbindet, durch die andere geht oder die andere schneidet. 19.

32. Durch jeden ausserhalb einer Geraden befindlichen Punkt giebt es (30) eine zur erstern parallele Gerade. Da hiernach zwei sich schneidende Gerade nicht zu einer und derselben dritten Geraden parallel seyn können, so muss, wenn drei Gerade in einerlei Ebene liegen, einer von folgenden vier Fällen statt finden:

a) Die Geraden schneiden sich in drei Punkten.

b) Die Geraden schneiden sich alle drei in einem Punkte.

c) Zwei von den drei Geraden sind zu einander parallel, werden aber beide von der dritten geschnitten.

d) Die Geraden sind alle drei zu einander parallel.

33. Schneiden sich drei Ebenen in drei Geraden, so schneiden sich diese entweder alle drei in einem Punkte oder sie sind alle drei zu einander parallel. Wenn nämlich irgend zwei von den drei Geraden sich schneiden und also die drei Ebenen einen Punkt mit einander gemein haben, so geht durch diesen (20) auch die dritte Gerade.

34. Werden zwei zu einander parallele Gerade und noch eine dritte Gerade angenommen, so ist diese entweder zu jeder von den beiden erstern oder zu keiner derselben parallel. Liegen nämlich die drei Geraden in einerlei Ebene, so folgt der Satz aus 32. Wenn aber die Geraden nicht alle drei in einer und derselben Ebene liegen, so müssen zwei Ebenen, welche die bei-

den erstern Geraden mit einem ausserhalb ihrer Ebene befindlichen Punkte der dritten verbinden, entweder in der dritten oder in einer vierten Geraden sich schneiden. Im erstern von diesen beiden Fällen ist (33) die dritte, im andern aber die vierte Gerade zu den beiden erstern parallel, daher alsdann (32) die dritte zu keiner derselben parallel ist.

Wenn also von beliebig vielen Geraden die zweite zur ersten und so jede folgende zu einer der vorhergehenden parallel ist, so sind alle zu einander parallel.

35. Zwei gerade Linien, welche Stücke von parallelen Geraden sind, heissen einstimmig- oder entgegengesetzt-parallel, je nachdem sie auf einerlei oder entgegengesetzten Seiten der durch ihre Anfangspunkte gehenden Geraden liegen. Da nun ein Halbstrahl durch seine Spitze und seine Richtung, diese aber durch irgend eine zu ihm einstimmig-parallele gerade Linie bestimmt ist, und hiebei jede von zwei einstimmig-parallelen geraden Linien die Stelle der andern vertreten kann, so kann von solchen Linien auch gesagt werden, dass sie einerlei Richtung haben oder darstellen.

Eine Richtung (die Richtung einer geraden Linie) soll in einer Winkelfläche oder einem Winkelraume enthalten heissen, wenn irgend ein Element dieses Gebildes jene Richtung hat. Alle nur denkbaren Richtungen werden durch einen Halbstrahlenbündel, alle Richtungen aber, welche in einer und derselben Ebene sich vorfinden, durch irgend einen in ihr liegenden Halbstrahlenbüschel dargestellt.

36. Von den beiden einander entgegengesetzten Richtungen, welche in einer Geraden enthalten sind, wird häufig nur wie von einer Richtung (mit einem Doppelsinne) gesprochen, so dass alsdann zwei Gerade einerlei oder verschiedene Richtungen haben, je nachdem sie parallel oder nicht parallel sind, und alle nur denkbaren Richtungen durch einen Strahlenbündel, alle Richtungen aber, welche in einer und derselben Ebene sich vorfinden, durch irgend einen in ihr liegenden Strahlenbüschel dargestellt werden. Es ergeben sich hieraus leicht folgende Sätze:

Wenn eine Gerade und eine Ebene sich schneiden, so ist in dieser die Richtung der Geraden nicht enthalten. — Enthält

eine Ebene von einer Geraden einen Punkt und die Richtung, so liegt die Gerade in der Ebene. — Sind von einer Ebene ein Punkt und eine Richtung gegeben, so ist auch eine Gerade gegeben, durch welche die Ebene gehen muss. — Alle Ebenen, welche durch einen und denselben Punkt gehen und eine und dieselbe Richtung enthalten, bilden einen Ebenenbüschel, dessen Axe durch jenen Punkt geht und jene Richtung hat. — Zwei sich schneidende Ebenen enthalten nur eine Richtung gemeinschaftlich, nämlich die Richtung ihrer Schnittlinie. — Durch jede Gerade, welche eine gegebene Richtung nicht hat, ist eine Ebene möglich, welche die gegebene Richtung enthält. — Durch jeden Punkt ist eine Ebene möglich, welche zwei gegebene Richtungen enthält.

37. Eine Ebene und eine Gerade heissen zu einander parallel, wenn sie keinen Punkt mit einander gemein haben, und also jede Ebene, welche die Gerade mit einem Punkte der erstern Ebene verbindet, diese in einer zu jener Geraden parallelen Geraden schneidet.

Werden eine Ebene und eine Gerade angenommen, so muss die Gerade entweder in der Ebene liegen oder zu ihr parallel seyn oder sie schneiden. Da nun die Richtung der Geraden sowohl im ersten als auch (nach dem Obigen) im zweiten Falle in der Ebene enthalten, im dritten aber (36) nicht in ihr enthalten ist, so folgt, dass eine Ebene und eine Gerade sich nicht schneiden oder sich schneiden, je nachdem die Ebene die Richtung der Geraden enthält oder nicht enthält. Wenn daher eine Ebene zu der einen von zwei parallelen Geraden parallel ist oder durch die eine geht, so schneidet sie auch die andere nicht. Wenn aber eine Ebene und eine Gerade sich schneiden, so schneidet die Ebene auch jede zur erstern Geraden parallele Gerade.

Durch jede von zwei Geraden, welche nicht in einerlei Ebene liegen, giebt es eine zur andern parallele (die Richtung der andern enthaltende) Ebene. — Ist eine Gerade zu zwei sich schneidenden Ebenen parallel, so ist sie auch zur Schnittlinie derselben parallel. 36.

38. Zwei Ebenen, welche sich nicht schneiden und also keinen Punkt mit einander gemein haben, heissen zu einander pa-

rallel. Der zwischen zwei solchen Ebenen (Schenkeln) befindliche Raum soll ein Parallelraum heissen.

Wenn zwei Ebenen zwei Richtungen gemeinschaftlich enthalten, so sind sie (36) zu einander parallel. Da aber jede Gerade, welche in der einen von zwei parallelen Ebenen liegt, zur andern parallel ist, so folgt, dass parallele Ebenen alle Richtungen, welche in ihnen sich vorfinden, gemeinschaftlich enthalten. Es ergeben sich hieraus noch nachstehende Sätze:

Ist eine Gerade zu der einen von zwei parallelen Ebenen parallel, so ist sie entweder auch zur andern parallel oder sie liegt in der andern. Wenn aber eine Gerade und eine Ebene sich schneiden, so schneidet die Gerade auch jede zur erstern Ebene parallele Ebene. — Zwei Ebenen, welche zu einer und derselben dritten Ebene parallel sind, sind auch unter sich parallel. Wenn aber eine Ebene die eine von zwei parallelen Ebenen schneidet, so muss sie auch die andere schneiden; die Schnittlinien selbst sind zu einander parallel. — Durch jede zu einer gegebenen Ebene parallele Gerade, so wie auch durch jeden ausserhalb der Ebene befindlichen Punkt giebt es eine zur erstern parallele Ebene (eine Ebene, welche von der erstern zwei und folglich alle Richtungen enthält).

39. Werden drei Ebenen angenommen, so muss nach dem Bisherigen einer von folgenden fünf Fällen statt finden:

a) Die Ebenen schneiden sich in drei Geraden und in einem Punkte.

b) Die Ebenen schneiden sich in drei zu einander parallelen Geraden.

c) Die Ebenen schneiden sich alle drei in einer Geraden.

d) Zwei von den drei Ebenen sind zu einander parallel, werden aber beide von der dritten geschnitten.

e) Die Ebenen sind alle drei zu einander parallel.

40. Parallele Ebene haben etwas Gemeinschaftliches, was an jeder derselben aufgefasst werden kann und ihre Stellung heissen soll, so dass also die Stellung einer Ebene durch jede zu ihr parallele Ebene bestimmt ist, und zwei Ebenen einerlei oder verschiedene Stellungen haben, je nachdem sie parallel sind oder sich schneiden. Ob in einer Ebene eine gegebene Richtung enthalten

oder nicht enthalten ist, hängt (38) nur von der Stellung der Ebene ab, daher man sagen kann, dass diese Stellung in dem einen Falle jene Richtung enthalte, im andern aber sie nicht enthalte. Kommen mehrere Richtungen und Stellungen in Betrachtung, so ist es in der Regel vortheilhaft, sie durch Strahlen und Ebenen anzuzeigen, welche alle durch einen und denselben Punkt gehen. Alle Richtungen, welche in einer und derselben Stellung enthalten sind, werden alsdann durch einen Strahlenbüschel, alle Stellungen aber, welche eine und dieselbe Richtung enthalten, durch einen Ebenenbüschel angezeigt.

Durch zwei Richtungen ist eine Stellung bestimmt, welche nämlich beide Richtungen enthält. Durch zwei Stellungen ist eine Richtung bestimmt, welche nämlich in beiden Stellungen enthalten ist.

41. Der Inbegriff von allen Geraden, welche nach einerlei Richtung in einer und derselben Ebene liegen, heisst ein Parallelstrahlenbüschel, der Inbegriff von allen Ebenen aber, welche einerlei Stellung haben, ein Parallelebenenbüschel. Der Parallelstrahlenbüschel ist als eine besondere Art von Strahlenbüschel, der Parallelebenenbüschel als eine besondere Art von Ebenenbüschel zu betrachten. Ein Strahlenbüschel hat hiernach entweder einen Mittelpunkt oder eine bestimmte Richtung, ein Ebenenbüschel aber entweder eine Axe oder eine bestimmte Stellung.

Der Inbegriff von allen nur denkbaren Geraden, welche eine und dieselbe Richtung haben, soll ein Parallelstrahlenbündel heissen. In einem Parallelstrahlenbündel sind also nicht nur unendlich viele Parallelstrahlenbüschel, sondern auch unendlich viele gewöhnliche Ebenenbüschel und Parallelebenenbüschel enthalten. Eine Ebene gehört nämlich jedem Strahlenbündel an, dessen Mittelpunkt oder Richtung sie enthält.

42. Von einer $\left\{\begin{matrix}\text{Geraden}\\\text{Ebene}\end{matrix}\right\}$ sagt man, dass sie nach ihrer $\left\{\begin{matrix}\text{Richtung}\\\text{Stellung}\end{matrix}\right\}$ jeden in ihr liegenden Punkt projicire. Ein gerades Gebilde wird also nach einer von seiner Richtung verschiedenen Richtung durch einen Parallelstrahlenbüschel, nach einer Stellung aber, welche seine Richtung nicht enthält, durch einen Parallel-

ebenenbüschel projicirt. Jedes begrenzte Stück der Geraden wird im erstern Falle durch einen Parallelstreifen, im letztern aber durch einen Parallelraum projicirt, welchen dasselbe spannt.

Ein ebenes System wird nach einer Richtung, welche in ihm nicht enthalten ist, durch einen Parallelstrahlenbündel projicirt, von welchem das ebene System ein Schnitt ist. Jedem Punkte der Ebene entspricht ein Strahl des Bündels, jeder Geraden eine Ebene, jeder begrenzten geraden Linie ein Parallelstreifen, jedem Parallelstreifen ein Parallelraum, jedem ebenen Winkel ein Flächenwinkel, jeder Linie eine Cylinderfläche und jeder Figur ein Strahlencylinder, dessen Mantel dem Umfange der Figur entspricht.

Die Ebene kann man als eine unbegrenzte, die Halbebene als eine einseitig begrenzte und den Parallelstreifen als eine von zwei Schenkeln begrenzte Cylinderfläche betrachten. Gewöhnlich versteht man jedoch unter einer Cylinderfläche eine krumme Fläche, welche man von Parallelstrahlen erfüllt sich denken kann.

---

§. 4.

Von den nEcken, nKanten und Polyedern.

43. Eine ebene Figur, welche von geraden Linien (Seiten) eingeschlossen ist, wird geradlinig und entweder nach der Anzahl n der Ecken ein nEck oder nach der Anzahl der Seiten, deren eben so viele sind, ein nSeit genannt.

Ein Viereck, welches zwei zu einander parallele Seiten hat, heisst ein Trapez. Ein Parallelogramm ist ein Viereck, in welchem je zwei Gegenseiten zu einander parallel sind oder in welchem zwei Parallelstreifen sich durchschneiden.

44. Statt Kegel sagt man lieber Pyramide, statt Cylinder aber Prisma, wenn der Mantel des Gebildes eine gebrochene Fläche ist. Der Mantel einer nseitigen Halbstrahlenpyramide ist aus n einfachen, der Mantel einer nseitigen Strahlenpyramide aus n vollkommnen ebenen Winkeln, der Mantel eines nseitigen Strahlenprismas aus n Parallelstreifen (Seiten) zusammengesetzt. Gewöhnlich wird aber ein solches Gebilde nach der Anzahl n

seiner Kanten ein nKant genannt, so dass also ein ebenes nEck aus jedem ausserhalb seiner Ebene befindlichen Punkte, so wie auch nach jeder Richtung, welche in seiner Ebene nicht enthalten ist, durch ein nKant projicirt wird.

45. Der unbegrenzte Raum wird durch drei Ebenen, welche in einem Punkte sich schneiden, in acht einfache oder vier vollkommne Dreikante getheilt. Durch vier Ebenen, welche durch seinen Mittelpunkt gehen, von welchen aber keine drei in einer und derselben Geraden sich schneiden, wird ein gewöhnlicher Strahlenbündel in vier Dreikante und drei Vierkante getheilt. Die vierte Ebene wird nämlich durch die drei Strahlen, in welchen die drei erstern Ebenen sie schneiden, in drei Winkel getheilt, deren jeder eines von den vier Dreikanten, welche die drei erstern Ebenen mit einander bilden, in ein Dreikant und ein Vierkant theilt.

46. Ein Körper, welcher von ebenen Flächen eingeschlossen ist, wird ebenflächig und nach der Anzahl n seiner Flächen, welche sämmtlich geradlinige Figuren sind, ein n Flach genannt. In jeder Kante eines Polyeders (ebenflächigen Körpers) stossen zwei seiner Flächen, in jedem Eckpunkte aber drei oder mehrere Flächen (eine Raumecke bildend) und eben so viele Kanten zusammen.

Der Mantel einer Pyramide, der ein nEck zur Grundfläche dient, ist aus n Dreiecken zusammengesetzt, welche die Seiten des nEcks zu Grundlinien und einen ausserhalb seiner Ebene befindlichen Punkt zur gemeinschaftlichen Spitze haben. Wird von einer Pyramide durch eine zu ihrer Grundfläche parallele Ebene ein Stück abgeschnitten, welches selbst wieder eine Pyramide ist, so bleibt eine abgestumpfte Pyramide übrig, deren Deckfläche zur Grundfläche parallel ist und deren Seitenflächen Trapeze sind. Ein nseitiges Strahlenprisma und ein Parallelraum, dessen Stellung die Richtung des erstern Gebildes nicht enthält, durchschneiden sich in einem nseitigen Prisma, dessen Mantel nämlich aus n Parallelogrammen zusammengesetzt ist.

47. Betrachtet man irgend eines von den vier Dreiecken, welche ein Tetraeder (Vierflach) begrenzen, als Grundfläche und also die übrigen als Seitenflächen, so erscheint der Körper als

eine dreiseitige Pyramide. Ein Tetraeder wird durch eine Ebene, welche dasselbe schneidet, entweder in zwei Tetraeder oder in eine dreiseitige und eine vierseitige Pyramide oder in ein Tetraeder und einen von zwei Dreiecken und drei Vierecken eingeschlossenen Körper oder in zwei solche Fünfflache getheilt, je nachdem nämlich die Ebene eine oder zwei oder drei oder vier Kanten des Tetraeders schneidet. In den drei erstern Fällen ist der Schnitt des Tetraeders mit der Ebene ein Dreieck, im vierten aber ein Viereck. Ist die schneidende Ebene zu zwei einander gegenüberliegenden Kanten parallel, so ist der Schnitt ein Parallelogramm.

48. Ein Parallelepipedon ist ein Körper, welcher von sechs Parallelogrammen eingeschlossen ist, oder in welchem drei Parallelräume, deren Stellungen nicht alle drei eine und dieselbe Richtung enthalten, sich durchschneiden. Je zwei von drei solchen Parallelräumen schneiden sich nämlich in einem vierseitigen Strahlenprisma, dessen Schnitt mit dem dritten ein Parallelepipedon ist.

Durch drei Gerade, deren Richtungen nicht in einer und derselben Stellung enthalten sind, und von welchen auch keine zwei sich schneiden, ist ein Parallelepipedon bestimmt, von welchem nämlich jede der drei Geraden eine Kante enthält, und welches entsteht, wenn man durch je zwei von den drei Geraden zwei zu einander parallele (die Richtungen beider enthaltende) Ebenen legt.

49. Wenn jeder Eckpunkt eines Polyeders mit jedem andern durch eine Kante oder eine aus Kanten zusammengesetzte Linie verbunden werden kann, und seine Oberfläche durch jede aus Kanten zusammengesetzte geschlossene Linie, welche nicht öfter als einmal durch einen und denselben Punkt geht, in zwei Theile getheilt wird, so ist die Anzahl E der Eckpunkte mehr der Anzahl F der Flächen gleich der Anzahl K der Kanten mehr zwei.

Wenn nämlich der Körper E Eckpunkte hat, so sind E—1 Kanten, von welchen die erste zwei Eckpunkte unter sich, die zweite einen derselben mit einem dritten, die dritte einen der drei vorigen mit einem vierten u. s. w. verbindet, hinreichend

um von jedem Eckpunkte auf jeden andern übergehen zu können. Da nun in einem solchen Systeme von Kanten keine geschlossene Linie enthalten ist, jede der übrigen (noch freien) Kanten aber mit zwei oder mehrern Kanten des Systems eine geschlossene Linie bildet, so sind die übrigen Kanten hinreichend aber auch alle erforderlich, um durch sie von jeder der F Flächen des Körpers auf jede andere übergehen zu können, woraus man schliessen kann, dass die Anzahl der übrigen Kanten $F-1$, mithin die Anzahl aller Kanten $E+F-2$ und demnach $E+F=K+2$ sey.

50. An den vorigen Satz lassen sich noch folgende Bemerkungen knüpfen.

I. Weil in jedem Eckpunkte wenigstens drei Kanten zusammenstossen, aber jede Kante nur zwei Eckpunkte verbindet, so ist $3E$ nicht grösser als $2K$. Weil ferner jede Fläche wenigstens von drei Kanten begrenzt ist, aber in jeder Kante nur zwei Flächen zusammenstossen, so ist auch $3F$ nicht grösser als $2K$. Da hiernach keine von den beiden Zahlen $3E$, $3F$, deren Summe $= 3K+6$ ist, grösser als $2K$ ist, so ist auch keine kleiner als $K+6$, folglich jede grösser als K, woraus man schliessen kann, dass weder in jedem Eckpunkte mehr als fünf Kanten zusammenstossen können, noch jede Fläche von mehr als fünf Kanten begrenzt seyn kann.

II. Wenn in jedem Eckpunkte m Kanten zusammenstossen, so ist $mE = 2K$ und mithin

$$E:F-2:K=2:m-2:m.$$

Ist jede Fläche von n Kanten begrenzt, so ist $nF=2K$ und mithin

$$F:E-2:K=2:n-2:n.$$

III. Wenn in jedem Eckpunkte m Kanten zusammenstossen und jede Fläche von n Kanten begrenzt, folglich $EF:(E-2)(F-2) = 4:(m-2)(n-2)$ und mithin $(m-2)(n-2) < 4$ ist, so muss entweder $m=3$ und $n=3$ oder $m=3$ und $n=4$ oder $m=4$ und $n=3$ oder $m=3$ und $n=5$ oder $m=5$ und $n=3$ seyn. Im ersten von diesen Fällen ist, wie aus II. leicht hervorgeht, der Körper ein Tetraeder, im zweiten ein 8eckiges

6Flach, im dritten ein 6eckiges 8Flach, im vierten ein 20eckiges 12Flach und im fünften ein 12eckiges 20Flach.

51. Da die aus den beiden Schenkeln eines einfachen ebenen Winkels zusammengesetzte Linie durch ein beliebiges die Spitze des Winkels in sich enthaltendes Stück derselben bestimmt ist, so sagt man, dass jede aus zwei geraden Linien zusammengesetzte gebrochene Linie einen hohlen und einen erhabenen ebenen Winkel und eben so jede aus zwei ebenen Flächen zusammengesetzte gebrochene Fläche einen hohlen und einen erhabenen Flächenwinkel bilde.

Von den beiden einfachen Winkeln, welche zwei aufeinanderfolgende Seiten eines ebenen nEcks oder einfachen nKants oder Strahlenprismas oder zwei aneinanderstossende Flächen eines Polyeders mit einander bilden, betrachtet man gewöhnlich entweder nur den innern oder nur den hohlen, welcher im Falle er zugleich der innere ist, ein ausspringender, im entgegengesetzten Falle aber ein einspringender Winkel genannt wird. Die Nebenwinkel eines ausspringenden Winkels sollen positive, die Nebenwinkel eines einspringenden Winkels aber negative Aussenwinkel heissen.

52. In der Folge ist, wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil bemerkt wird, unter einem Winkel immer ein vollkommner Winkel und unter einem nKante immer ein nKant im Strahlenbündel zu verstehen.

Alle Strahlen, welche den Umfang eines ebenen nEcks in einem und demselben Eckpunkte berühren, erfüllen, je nachdem die Berührung auf der äussern oder innern Seite statt findet, einen positiven oder negativen Aussenwinkel, dessen Nebenwinkel im erstern Falle ein ausspringender, im letztern Falle aber ein einspringender Winkel der Figur ist und alle Strahlen enthält, welche den Umfang derselben in jedem Eckpunkte schneiden. Eben so erfüllen alle Ebenen, welche den Mantel eines nKants oder die Oberfläche eines Polyeders in einer und derselben Kante (von aussen oder von innen) berühren, einen Aussenwinkel, welcher von einem (ausspringenden oder einspringenden) Winkel des Gebildes der Nebenwinkel ist.

53. Wenn der Umfang eines ebenen nEcks oder der Mantel

eines nKants oder die Oberfläche eines Polyeders von keiner Geraden in mehr als zwei Punkten geschnitten wird, so hat das Gebilde offenbar lauter ausspringende Winkel. Umgekehrt kann man, wie man sich leicht überzeugt, aus der letztern Eigenschaft immer auf die erstere schliessen.

Der Umfang eines nEcks kann von einer Geraden höchstens in n Punkten und folglich, wenn n eine unpare Zahl ist, höchstens in $n - 1$ Punkten geschnitten werden. Hat ein ebenes nEck lauter ausspringende Winkel, so gilt diess auch von jeder Pyramide, welche das nEck zur Grundfläche hat. Hat ein Polyeder lauter ausspringende Winkel, so gilt diess auch von jedem Schnitte desselben, so wie auch von jedem der beiden Theile, in welche das Polyeder durch die schneidende Ebene getheilt wird.

---

§. 5.

Unendlich ferne Elemente.

54. Aus den Sätzen des vorletzten §. ist zu ersehen, dass in vielen Fällen ein Punkt durch eine Richtung, eine Gerade aber durch eine Stellung vertreten wird, und dass also zu den Elementen einer Geraden auch noch ihre Richtung, zu den Elementen einer Ebene aber auch noch ihre Stellung und alle in derselben enthaltenen Richtungen gehören. Zwei Gerade, welche in einerlei Ebene liegen, haben entweder einen Punkt gemein oder einerlei Richtung. Zwei Ebenen haben entweder eine Gerade gemein oder einerlei Stellung. Eine Ebene enthält von einer nicht in ihr liegenden Geraden entweder nur einen Punkt oder nur die Richtung. Es wird hiernach nicht unzweckmässig seyn für Richtung und Stellung noch andere Ausdrücke einzuführen, welche an das, was sie vertreten, unmittelbar erinnern und Sätze, welche nur besondere Modifikationen von andern sind, auch als solche bezeichnen.

55. Wenn in einer Ebene die eine von zwei sich schneidenden Geraden um einen ausserhalb der andern befindlichen Punkt in unverändertem Sinne gedreht wird, so rückt der Schnitt-

punkt in der andern (festen) Geraden immer weiter fort, bis er bei der parallelen Lage der beiden Geraden sich ganz verliert. Von parallelen Geraden sagt man daher, dass sie in einem unendlich fernen (uneigentlichen) Punkte sich schneiden. Wird die Drehung im vorigen Sinne fortgesetzt, so kommt der Schnittpunkt der beiden Geraden auf der entgegengesetzten Seite zum Vorschein und gelangt am Ende, wenn die sich drehende Gerade einen Strahlenbüschel beschrieben hat, wieder an seine anfängliche Stelle. Eine Gerade erscheint hiernach, wenn man ihr einen unendlich fernen Punkt zuschreibt, in welchem sie von allen zu ihr parallelen Geraden und Ebenen geschnitten, als eine geschlossene Linie, daher alsdann unter vier Punkten in ihr nur zwei Paar getrennte sind.

56. Von allen unendlich fernen Punkten einer Ebene wird gesagt, dass sie in einer unendlich fernen (uneigentlichen) Linie liegen, welche, weil sie von einer jeden (andern) mit ihr in einerlei Ebene liegenden Geraden in einem Punkte geschnitten wird, selbst eine Gerade heisst. Gleichwie in jeder Richtung ein unendlich ferner Punkt liegt, so liegt in jeder Stellung eine unendlich ferne Gerade, in welcher alle Ebenen, die diese Stellung haben, sich schneiden.

Parallelstrahlenbüschel, welche in einerlei Ebene liegen, haben einen Strahl, nämlich die unendlich ferne Gerade, welche von jedem der Büschel den uneigentlichen Mittelpunkt enthält, mit einander gemein.

57. Von allen unendlich fernen Punkten und Linien wird gesagt, dass sie in einer unendlich fernen (uneigentlichen) Fläche liegen, welche, weil sie von einer jeden nicht in ihr liegenden Geraden in einem Punkte und von jeder (andern) Ebene in einer Geraden geschnitten wird, selbst eine Ebene heisst. Alle Parallelebenenbüschel haben hiernach ein Element, nämlich die unendlich ferne Ebene, in welcher alle ihre uneigentlichen Axen liegen, mit einander gemein. Eine Gerade, welche sich bewegt, ohne ihre Richtung zu ändern, dreht sich um einen unendlich fernen Punkt, eine Ebene aber, welche sich bewegt, ohne ihre Stellung zu ändern, um eine unendlich ferne Axe.

Ein unendlich ferner Punkt liegt in einer unendlich fernen

Geraden, wenn die Stellung, welcher diese Gerade entspricht, die Richtung enthält, welcher jener Punkt entspricht. Ein unendlich fernes (uneigentliches) gerades Gebilde entspricht also dem Inbegriffe von allen Richtungen, welche in einer und derselben Stellung enthalten sind, ein unendlich ferner (uneigentlicher) Strahlenbüschel aber dem Inbegriffe von allen Stellungen, welche eine und dieselbe Richtung enthalten. Zu den Elementen eines Parallelstrahlenbündels gehören auch die unendlich ferne Ebene und jede unendlich ferne Gerade, welche durch seinen (uneigentlichen) Mittelpunkt geht.

58. Durch die in diesem §. aufgestellte Ansicht, welche im Gegensatze zur gewöhnlichen die perspektivische heissen soll, werden oft anscheinend ganz verschiedene Sätze in eine Aussage zusammengefasst und die Ausnahmen beseitigt, welche ausserdem der Aufstellung allgemeiner Gesetze häufig im Wege stehen würden.

Der Satz, dass eine Gerade durch zwei Punkte bestimmt sey, begreift zwei besondere Fälle in sich, indem der eine von den beiden Punkten oder auch beide im Unendlichen liegen können. Eine eigentliche Gerade ist nämlich auch durch einen Punkt und ihre Richtung, eine Stellung (unendlich ferne Gerade) aber durch zwei Richtungen bestimmt.

Von dem Satze, dass durch eine Gerade und einen ausserhalb derselben befindlichen Punkt eine Ebene bestimmt ist, ist der besondere Fall, in welchem der gegebene Punkt im Unendlichen liegt (statt des Punktes eine Richtung gegeben ist), in 36 und der besondere Fall, in welchem die gegebene Gerade im Unendlichen liegt (statt einer eigentlichen Geraden die Stellung der Ebene gegeben ist), in 38 enthalten. Liegen die gegebenen Elemente beide im Unendlichen, so ist die durch sie bestimmte Ebene die unendlich ferne Ebene selbst.

59. Zwei Grundgebilde heissen auf einander bezogen, wenn jedem Elemente eines jeden ein Element des andern zugewiesen ist, welches jenem entsprechend heisst. Wenn also von beliebig vielen Gebilden das zweite auf das erste und jedes folgende auf eines der vorhergehenden bezogen ist, so sind alle auf einander bezogen.

Die einfachste Art, ein gerades Gebilde s und einen Ebenen-

büschel, dessen Axe das erstere Gebilde nicht schneidet, auf einander zu beziehen, besteht darin, dass man das gerade Gebilde als einen Schnitt des Ebenenbüschels (mit der Geraden s) betrachtet. Es liegt alsdann jeder Punkt des geraden Gebildes in der ihm entsprechenden Ebene des Büschels. Ist von einem Ebenenbüschel ein Strahlenbüschel und von diesem ein gerades Gebilde ein Schnitt, so ist auch das gerade Gebilde ein Schnitt des Ebenenbüschels.

In zwei Strahlenbüscheln, welche Schnitte eines und desselben Ebenenbüschels sind, entsprechen einander je zwei Strahlen, welche in einer und derselben Ebene des Ebenenbüschels liegen, in zwei Strahlenbüscheln aber, welche Scheine eines und desselben geraden Gebildes sind, je zwei Strahlen, welche einen und denselben Punkt des geraden Gebildes projiciren.

60. Betrachtet man ein ebenes System S als Schnitt eines Strahlenbündels S_1, dessen Mittelpunkt nämlich ausserhalb der Ebene S liegt, und also den Strahlenbündel als einen Schein des ebenen Systems, so entspricht jedem Gebilde in S_1 ein Gebilde in S, welches vom erstern die Spur ist, und jedem Gebilde in S ein Gebilde in S_1, welches das erstere projicirt. Ist S_1 ein gewöhnlicher Strahlenbündel und S eine eigentliche Ebene, so entspricht der zu dieser Ebene parallelen Ebene P des Bündels die unendlich ferne Gerade des ebenen Systems, jeder andern Ebene eine eigentliche Gerade, jedem Ebenenbüschel, dessen Axe in der Ebene P liegt, ein Parallelstrahlenbüschel, jedem andern Ebenenbüschel ein gewöhnlicher Strahlenbüschel u. s. w. Ist S_1 ein Parallelstrahlenbündel, so entspricht jedem eigentlichen Elemente ein eigentliches Element und jedem uneigentlichen Elemente ein uneigentliches Element. Wenn endlich S die unendlich ferne Ebene ist, so entspricht jedem Strahle des Bündels ein unendlich ferner Punkt, jeder Ebene eine unendlich ferne Gerade, jedem Strahlenbüschel ein unendlich fernes gerades Gebilde und jedem Ebenenbüschel ein unendlich ferner Strahlenbüschel.

Nennt man in zwei gewöhnlichen Strahlenbündeln je zwei Strahlen, welche einerlei Richtung haben, einander entsprechend, so betrachtet man die Strahlenbündel als Scheine eines und desselben ebenen Systems, dessen Träger nämlich die unendlich ferne Ebene

ist. Merkt man bei der Bewegung einer eigentlichen Geraden nur auf die Aenderung ihrer Richtung, so betrachtet man die (uneigentliche) Linie, welche ihr unendlich ferner Punkt beschreibt.

61. Jede Gerade wird durch je zwei in ihr befindliche Punkte A, B in zwei Strecken AB, A·B (oder AB, B·A) getheilt, von welchen jede die Ergänzung der andern heissen soll. Eine Strecke ist also entweder eine endliche oder ins Unendliche oder durch das Unendliche gehende oder im Unendlichen liegende Strecke. Eine eigentliche Gerade wird durch zwei eigentliche Punkte in eine Strecke der ersten und eine Strecke der dritten Art, durch einen eigentlichen und ihren unendlich fernen Punkt aber in zwei Strecken der zweiten Art (in zwei Halbstrahlen) getheilt. Jedes Stück einer unendlich fernen Geraden ist eine Strecke der vierten Art.

Nach der perspektivischen Ansicht sind Halbstrahlen und Halbebenen nicht Elemente sondern Stücke von Gebilden, daher auch in der Folge unter einem Büschel ein Strahlen- oder Ebenenbüschel und unter einer Kegelfläche, wenn sie nicht ausdrücklich eine einfache genannt wird, eine Fläche im Strahlenbündel zu verstehen ist. Eine Cylinderfläche ist eine (uneigentliche) Kegelfläche, deren Mittelpunkt im Unendlichen liegt.

62. Nach der perspektivischen Ansicht wird jeder Büschel durch je zwei seiner Elemente in ein Paar Nebenwinkel getheilt, so dass es fünf Arten von ebenen Winkeln und vier Arten von Flächenwinkeln giebt.

Zwei Gerade, welche in einem eigentlichen Punkte sich schneiden, bilden mit einander zwei ebene Winkel der ersten Art (eigentliche ebene Winkel). Ein Parallelstrahlenbüschel wird durch zwei eigentliche Strahlen in einen ebenen Winkel der zweiten Art (Parallelstreifen) und einen ebenen Winkel der vierten Art, welcher den unendlich fernen Strahl in sich enthält, durch einen eigentlichen Strahl und den unendlich fernen Strahl aber in zwei ebene Winkel der dritten Art (Halbebenen) getheilt. Je zwei unendlich ferne Gerade sind die Schenkel von zwei ebenen Winkeln der fünften Art.

Zwei Ebenen, welche in einer eigentlichen Geraden sich

schneiden, bilden mit einander zwei Flächenwinkel der ersten Art (eigentliche Flächenwinkel). Ein Parallelebenenbüschel wird durch zwei eigentliche Ebeuen in einen Flächenwinkel der zweiten Art (Parallelraum) und in einen Flächenwinkel der vierten Art, welcher die unendlich ferne Ebene in sich enthält, durch eine eigentliche Ebene und die unendlich ferne Ebene aber in zwei Flächenwinkel der dritten Art getheilt.

Ist ein ebenes System S ein Schnitt von einem Strahlenbündel S_1, so entspricht jeder Strecke in S ein ebener Winkel in S_1, jedem Winkel in S ein Flächenwinkel in S_1, jedem ebenen Winkel in S_1 eine Strecke in S und jedem Flächenwinkel in S_1 ein Winkel in S.

63. Hat man von zwei nicht in einerlei Ebene liegenden Geraden die eine als Axe, aus welcher und die andere als Projektionslinie, auf welche projicirt werden soll, angenommen, so versteht man unter der Projektion eines Punktes den Schnittpunkt der Projektionslinie mit der Ebene, welche aus der angenommenen Axe jenen Punkt projicirt. Die Projektion einer Strecke, welche mit der Projektionsaxe nicht in einerlei Ebene liegt, ist der Schnitt der Projektionslinie mit dem Flächenwinkel, welcher jene Strecke projicirt. Liegt eine Linie mit der Projektionsaxe in einerlei Ebene, so ist ihre Projektion nur ein Punkt. Wenn die Projektionsaxe im Unendlichen liegt und also nach einer bestimmten Stellung projicirt wird, so ist die Projektion einer jeden endlichen Strecke, deren Richtung in jener Stellnng nicht enthalten ist, ebenfalls eine endliche Strecke.

Ein gerades Gebilde und seine Projektion auf eine andere Gerade aus einer Axe, welche mit keiner von den beiden erstern Geraden in einerlei Ebene liegt, sind nichts anderes als Schnitte eines und desselben Ebenenbüschels mit zwei Geraden. Liegen diese in einerlei Ebene, so sind die geraden Gebilde zugleich Schnitte eines und desselben Strahlenbüschels, so dass es alsdann einerlei ist, ob man sie aus jener Axe oder aus deren Spur in jener Ebene auf einander projicirt.

64. Unter der Projektion eines Gebildes auf eine Ebene (Projektionsebene) aus einem ausserhalb derselben gegebenen Mittelpunkte (Projektionscentrum) versteht man den Schnitt der Pro-

jektionsebene mit dem aus jenem Mittelpunkte genommenen Scheine des Gebildes. Die Projektion einer Strecke, welche mit dem Projektionscentrum nicht in einer und derselben Geraden liegt, ist also der Schnitt der Projektionsebene mit dem ebenen Winkel, welcher jene Strecke projicirt. Die Projektion eines ebenen Winkels, welcher mit dem Projektionscentrum nicht in einerlei Ebene liegt, ist der Schnitt der Projektionsebene mit dem Flächenwinkel, welcher jenen ebenen Winkel projicirt. Liegt eine gerade Linie mit dem Projektionscentrum in einer und derselben Geraden, so ist ihre Projektion nur ein Punkt. Liegt eine Fläche mit dem Projektionscentrum in einerlei Ebene, so ist ihre Projektion nur eine Linie.

Ein ebenes System und seine Projektion auf eine andere Ebene aus einem ausserhalb beider Ebenen befindlichen Punkte sind nichts anderes als Schnitte eines und desselben Strahlenbündels mit zwei Ebenen. Wenn diese Ebenen zu einander parallel sind oder der Mittelpunkt des Strahlenbündels im Unendlichen liegt (also nach einer bestimmten Richtung projicirt wird) oder beides zugleich der Fall ist, so entspricht jedem eigentlichen Punkte einer jeden von den beiden Ebenen ein eigentlicher Punkt in der andern, jeder endlichen Strecke eine endliche Strecke, jedem gewöhnlichen Strahlenbüschel ein gewöhnlicher Strahlenbüschel, jedem Parallelstrahlenbüschel ein Parallelstrahlenbüschel u. s. w. Wenn aber die Ebenen in einer eigentlichen Geraden sich schneiden und das Projektionscentrum ein eigentlicher Punkt ist, so entspricht der unendlich fernen Geraden einer jeden von den beiden Ebenen eine eigentliche Gerade in der andern, daher es alsdann nur ein Paar einander entsprechende Parallelstrahlenbüschel giebt, und weder zwei einander entsprechende Strecken noch zwei einander entsprechende Winkel nothwendig von einerlei Art sind.

65. In dem Satze, dass eine Fläche und eine Linie in einem Punkte sich schneiden, wenn die ihm zunächstliegenden Theile der Linie auf entgegengesetzten Seiten der Fläche liegen, wird vorausgesetzt, dass man unter den beiden Seiten der Fläche zwei körperliche Räume sich denken könne, welche in der Fläche, aber nicht zugleich in einer andern durch jenen Punkt gehenden Fläche zusammenstossen. Um daher zu entscheiden, ob eine Ebene E

und eine ausserhalb derselben befindliche Linie L, welche durch einen und denselben unendlich fernen Punkt P gehen, in diesem Punkte sich schneiden oder berühren, nehme man irgend eine Ebene F an, welche nicht durch P geht. Wenn nun die Linie L im Punkte P von einem der beiden Flächenwinkel EF, E·F in den andern übergeht, so ist P ein Schnittpunkt, im entgegengesetzten Falle aber ein Berührungspunkt der Ebene E und der Linie L.

Zwei zu einander parallele Halbstrahlen AP, BP treffen die unendlich ferne Ebene in einem und demselben Punkte und zwar auf einerlei oder entgegengesetzten Seiten, je nachdem sie einstimmig- oder entgegengesetzt-parallel sind. Die gebrochene Linie APB wird nämlich im Punkte P von der unendlichen fernen Ebene im erstern Falle berührt, im letztern aber geschnitten. Ein Strahlenkegel wird durch das in ihm liegende Stück der unendlich fernen Ebene in zwei Halbstrahlenkegel getheilt, welche auf entgegengesetzten Seiten ihrer gemeinschaftlichen unendlich fernen Grundfläche liegen.

---

§. 6.

Gesetz der Reciprocität.

66. Schon die ersten Sätze der Geometrie lassen ein gewisses Gesetz der Reciprocität oder Dualität erkennen, nach welchem im Raume der Punkt und die Ebene einander gegenüberstehen (reciproke Begriffe sind), und jeder Satz, in welchem zwischen eigentlichen und uneigentlichen Elementen kein Unterschied gemacht wird, seine Ergänzung in einem andern findet, der aus dem erstern hervorgeht, wenn man Punkt und Ebene (also auch gerades Gebilde und Ebenenbüschel, Strecke und Flächenwinkel u. s. w.) mit einander vertauscht. Gewöhnlich werden zwei solche Sätze wie die beiden Seiten eines Satzes neben einander gestellt z. B.

α_1) Durch zwei Punkte A, B ist eine Gerade AB bestimmt, welche nämlich durch beide Punkte geht.

β_1) Durch eine Gerade a und einen ausserhalb derselben be-

α_2) Durch zwei Ebenen A, B ist eine Gerade AB bestimmt, in welcher nämlich die beiden Ebenen sich schneiden.

β_2) Durch eine Gerade a und eine nicht durch sie gehende

findlichen Punkt B ist eine Ebene a B bestimmt, welche die Gerade mit dem Punkte verbindet.

γ_1) Durch drei Punkte A, B, C, welche nicht in einer und derselben Geraden liegen, ist eine Ebene A B C bestimmt, welche durch die drei Punkte geht.

δ_1) Zwei Gerade, welche einen Punkt gemein haben, liegen auch in einerlei Ebene.

Ebene B ist ein Punkt a B bestimmt, in welchem die Gerade und die Ebene sich schneiden.

γ_2) Durch drei Ebenen A, B, C, welche nicht durch eine und dieselbe Gerade gehen, ist ein Punkt A B C bestimmt, in welchem die drei Ebenen sich schneiden.

δ_2) Zwei Gerade, welche in einerlei Ebene liegen, haben auch einen Punkt gemein.

67. Die vorigen Sätze führen auf folgende Aufgaben (Forderungen):

α_1) Durch zwei gegebene Punkte eine Gerade zu ziehen.

β_1) Durch eine gegebene Gerade und einen ausserhalb derselben gegebenen Punkt eine Ebene zu legen.

γ_1) Durch drei gegebene nicht in einer und derselben Geraden liegende Punkte eine Ebene zu legen.

δ_1) Durch zwei gegebene Gerade, welche einen Punkt mit einander gemein haben, eine Ebene zu legen.

α_2) Die Schnittlinie von zwei gegebenen Ebenen zu finden.

β_2) Den Schnittpunkt einer gegebenen Ebene mit einer nicht in ihr liegenden Geraden zu finden.

γ_2) Den Schnittpunkt von drei gegebenen nicht in einer und derselben Geraden sich schneidenden Ebenen zu finden.

δ_2) Den Schnittpunkt von zwei gegebenen in einerlei Ebene liegenden Geraden zu finden.

Legt man durch einen gegebenen eigentlichen Punkt eine Ebene, welche zwei gegebene Richtungen enthält, so hat man durch drei gegebene Punkte, von welchen zwei im Unendlichen liegen, eine Ebene gelegt. Weiss man von zwei Geraden, dass sie zu einander parallel sind, so ist durch die eine von beiden auch ihr Schnittpunkt gegeben.

68. Wenn A, B, C, D vier Punkte sind, und die Geraden A B, C D sich schneiden, so lie-

Wenn A, B, C, D vier Ebenen sind, und die Geraden A B, C D sich schneiden, so gehen

gen die vier Punkte in einerlei Ebene, daher alsdann auch die Geraden AC, BD, so wie auch die Geraden AD, BC sich schneiden.

die vier Ebenen durch einen und denselben Punkt, daher alsdann auch die Geraden AC, BD, so wie auch die Geraden AD, BC sich schneiden.

69. Wenn von beliebig vielen Geraden je zwei sich schneiden, aber nicht alle in

einem Punkte sich schneiden, so liegen alle in einerlei Ebene.

einerlei Ebene liegen, so schneiden sich alle in einem Punkte.

70. Gleichwie ein Gebilde, welches aus den Elementen A, B, C, D besteht, gewöhnlich durch ABCD bezeichnet wird, so soll ein Gebilde, welches aus den Elementen SA, SB, SC, SD besteht, durch S(ABCD) bezeichnet werden. Sind A, B, C, D

Punkte, so muss S entweder ein Punkt oder eine Gerade seyn.

Ebenen, so muss S entweder eine Ebene oder eine Gerade seyn.

71. Soll in einer gegebenen Ebene durch einen in ihr gegebenen Punkt eine Gerade gezogen werden, welche eine ausserhalb der Ebene gegebene, nicht durch jenen Punkt gehende Gerade schneide, so wird man entweder den Schnittpunkt der gegebenen Ebene mit der gegebenen Geraden suchen und alsdann durch diesen nnd den gegebenen Punkt eine Gerade ziehen, oder man wird durch den gegebenen Punkt und die gegebene Gerade eine Ebene legen und alsdann die Schnittlinie dieser Ebene mit der gegebenen Ebene suchen. Jede von diesen beiden Auflösungsarten kann der andern, die Aufgabe aber sich selbst gegenüber gestellt werden.

72. Durch einen gegebenen Punkt eine Gerade zu ziehen, welche zwei gegebene Gerade, von welchen keine durch den gegebenen Punkt geht, und welche auch nicht beide mit ihm in einer und derselben Ebene liegen, schneide. — Man lege durch den gegebenen Punkt und die eine von den gegebenen Geraden eine Ebene, so ist die

In einer gegebenen Ebene eine Gerade zu ziehen, welche zwei gegebene Gerade, von welchen keine in der gegebenen Ebene liegt, und welche auch nicht beide mit ihr einen und denselben Punkt gemein haben, schneide. — Man suche den Schnittpunkt der gegebenen Ebene mit der einen von den gegebenen Geraden, so ist die

Aufgabe auf die vorige zurückgeführt.

Aufgabe auf die vorige zurückgeführt.

Soll eine Gerade gezogen werden, welche drei gegebene Gerade, deren keine zwei in einerlei Ebene liegen, schneide, so wird man entweder in einer von den gegebenen Geraden einen beliebigen Punkt annehmen und alsdann durch diesen eine Gerade legen, welche die beiden andern schneidet; oder man wird, was das Reciproke ist, durch eine von den gegebenen Geraden eine beliebige Ebene legen und alsdann in dieser eine Gerade ziehen, welche die beiden andern schneidet.

73. Wenn zwei Gebilde auf einander bezogen sind und ein Element des einen Gebildes mit dem ihm entsprechenden Elemente des andern zusammenfällt (identisch ist), so soll von diesem Elemente gesagt werden, dass es den beiden Gebilden entsprechend gemein sey.

In zwei ebenen Systemen, welche Schnitte eines und desselben Strahlenbündels sind, entsprechen einander je zwei Elemente, welche von einem und demselben Elemente des Bündels die Spuren sind. Die Schnittlinie der beiden Ebenen entspricht sich selbst; dasselbe gilt von einem jeden in dieser Geraden befindlichen Punkte. Die beiden ebenen Systeme haben hiernach ein gerades Gebilde (alle Punkte desselben) entsprechend gemein.

In zwei Strahlenbündeln, welche Scheine eines und desselben ebenen Systems sind, entsprechen einander je zwei Elemente, welche ein und dasselbe Element des ebenen Systems projiciren. Der den beiden Bündeln gemeinschaftliche Strahl entspricht sich selbst; dasselbe gilt von einer jeden durch ihn gehenden Ebene. Die beiden Strahlenbündel haben hiernach einen Ebenenbüschel (alle Elemente desselben) entsprechend gemein.

74. Zwei Strahlenbüschel, welche Schnitte eines und desselben Ebenenbüschels sind, haben entweder einen Strahl entsprechend gemein, oder sind zugleich Scheine eines und desselben geraden Gebildes, je

Zwei Strahlenbüschel, welche Scheine eines und desselben geraden Gebildes sind, haben entweder einen Strahl entsprechend gemein, oder sind zugleich Schnitte eines und desselben Ebenenbüschels, je nachdem sie

nachdem sie nämlich concentrisch oder nicht concentrisch sind.

nämlich in einerlei oder nicht in einerlei Ebene liegen.

75. Das System von allen im Raume denkbaren

Punkten wird durch zwei Ebenen A, B in zwei Systeme getheilt, welche die beiden Ebenen (als Träger von Punkten) zu gemeinschaftlichen Grenzen haben und von welchen das eine im Winkel AB und das andere im Winkel A·B enthalten ist.

Ebenen wird durch zwei Punkte P, Q in zwei Systeme getheilt, welche die Ebenenbündel P, Q zu gemeinschaftlichen Grenzen haben und von welchen das eine die Strecke PQ und das andere die Strecke P·Q schneidet.

Sind zwei Elemente durch zwei andere getrennt, so sind auch diese durch jene getrennt. Wenn z. B. der eine von den beiden Punkten P, Q in dem Winkel AB und der andere in dem Winkel A·B liegt, so schneidet auch die eine von den beiden Ebenen A, B die Strecke PQ und die andere die Strecke P·Q.

76. In der Ebene stehen der Punkt und die Gerade, im Strahlenbündel aber der Strahl und die Ebene einander gegenüber. Z. B.

Das System von allen in einer und derselben Ebene befindlichen

Punkten wird durch zwei Gerade A, B in zwei Systeme getheilt, welche die beiden Geraden zu gemeinschaftlichen Grenzen haben und von welchen das eine in dem Winkel AB und das andere in dem Winkel A·B enthalten ist.

Geraden wird durch zwei Punkte A, B in zwei Systeme getheilt, welche die beiden Strahlenbüschel A, B zu gemeinschaftlichen Grenzen haben und von welchen das eine die Strecke AB und das andere die Strecke A·B schneidet

Das System von allen einem Strahlenbündel zugehörigen

Strahlen wird durch zwei Ebenen A, B in zwei Systeme geheilt, welche die Ebenen (Strahlenbüschel) A, B zu gemeinschaftlichen Grenzen haben und von welchen das eine in dem Winkel AB und das andere in dem Winkel A·B enthalten ist.

Ebenen wird durch zwei Strahlen A, B in zwei Systeme getheilt, welche die Ebenbüschel A, B zu gemeinschaftlichen Grenzen haben und von welchen das eine den Winkel AB und das andere den Winkel A·B schneidet.

77. α_1) Werden in einer Ebene zwei Punkte (als Mittelpunkte) angenommen, so ist jeder dritte Punkt der Ebene, welcher mit jenen beiden nicht in einer und derselben Geraden liegt, durch die beiden Strahlen bestimmt, welche ihn aus den angenommenen Punkten projiciren.

α_2) Werden in einer Ebene zwei Gerade angenommen, so ist jede dritte Gerade der Ebene, welche nicht durch den Schnittpunkt der beiden erstern geht, durch ihre Spuren in den angenommenen Geraden bestimmt.

α_3) Werden in einem Strahlenbündel zwei Strahlen als Axen angenommen, so ist jeder dritte Strahl desselben, welcher mit jenen beiden nicht in einer und derselben Ebene liegt, durch die beiden Ebenen bestimmt, welche ihn aus den angenommenen Axen projiciren.

α_4) Werden in einem Strahlenbündel zwei Ebenen angenommen, so ist jede dritte Ebene desselben, welche nicht durch die Schnittlinie der beiden erstern geht, durch ihre Spuren (Strahlen) in den angenommenen Ebenen bestimmt.

In der Folge werden von vier solchen zusammengehörigen Sätzen, von welchen zwei der Geometrie der Ebene und zwei der Geometrie des Strahlenbündels angehören, gewöhnlich nur die beiden erstern ausgesprochen werden, da aus ihnen die beiden letztern hervorgehen, wenn man ein ebenes System als Schnitt eines Strahlenbündels betrachtet, und also für die Ausdrücke: Punkt, Gerade, gerades Gebilde u. s. w. die Ausdrücke: Strahl, Ebene, Strahlenbüschel u. s. w. substituirt. Stellt man Punkt und Ebene einander gegenüber, so ist α_1 das Reciproke von α_1 und α_3 das Reciproke von α_2.

78. Die einfachsten Arten, die Elemente eines körperlichen Systems durch die Elemente von andern Grundgebilden zu bestimmen, sind in nachstehenden Sätzen enthalten.

α_1) Werden eine Gerade und ein Punkt angenommen, welcher mit der Geraden eine Ebene bestimmt, so ist jeder ausserhalb dieser Ebene befindliche Punkt durch die Ebene und den

α_2) Werden eine Gerade und eine Ebene angenommen, welche in einem Punkte sich schneiden, so ist jede nicht durch diesen Punkt gehende Ebene durch ihre Spuren in der angenommenen

Strahl bestimmt, welche ihn aus der angenommenen Geraden und dem angenommenen Punkte projiciren.

β_1) Werden in einer Ebene drei Gerade angenommen, welche nicht in einem und demselben Punkte sich schneiden, so ist jeder ausserhalb jener Ebene befindliche Punkt durch die drei Ebenen bestimmt, welche ihn aus den angenommenen Geraden projiciren.

γ_1) Werden zwei Punkte angenommen, so ist jede Gerade, welche nicht mit beiden in einer und derselben Ebene liegt, durch die beiden Ebenen bestimmt, welche sie aus den angenommenen Punkten projiciren.

Geraden und der angenommenen Ebene bestimmt.

β_2) Werden drei Gerade angenommen, welche nicht in einerlei Ebene liegen, aber durch einen und denselben Punkt gehen, so ist jede nicht durch diesen Punkt gehende Ebene durch ihre Spuren in den drei angenommenen Geraden bestimmt.

γ_2) Werden zwei Ebenen angenommen, so ist jede Gerade, welche nicht beide in einem und demselben Punkte schneidet, durch ihre Spuren in den angenommenen Ebenen bestimmt.

---

§. 7.

Von den n Ecken, n Kanten u. s. w. in einer andern Bedeutung.

79. Unter einem ebenen n Ecke versteht man häufig nur den Inbegriff von n in einerlei Ebene liegenden Punkten (Eckpunkten) und den n Geraden (Seiten), deren jede zwei aufeinanderfolgende Eckpunkte verbindet. Man denkt sich hiebei die n Punkte in einer bestimmten Aufeinanderfolge, so dass auf den letzten wieder der erste folgt, und setzt voraus, dass keine drei aufeinanderfolgende in einer und derselben Geraden liegen.

Die 2n Elemente des ebenen n Ecks $A_1\ A_2\ A_3 \ldots A_n$ sind der Ordnung nach der Punkt A_1, die Gerade $A_1 A_2$, der Punkt A_2, die Gerade $A_2 A_3$ u. s. w. Dem ersten Elemente heisst das $(n+1)^{te}$, dem zweitem das $(n+2)^{te}$ u. s. w. gegenüberliegend, so dass also, wenn n eine pare Zahl ist, jedem Eckpunkte ein

Eckpunkt und jeder Seite eine Seite gegenüberliegt, während im entgegengesetzten Falle das eine von zwei einander gegenüberliegenden Elementen ein Eckpunkt, das andere aber eine Seite ist.

Jede Gerade, welche zwei nicht aufeinanderfolgende Eckpunkte eines ebenen n Ecks verbindet, heisst eine Diagonale desselben. Die beiden Diagonalen des ebenen Vierecks A B C D sind gemeinschaftliche Seiten der Vierecke A C B D, A C D B.

80. Ein vollständiges ebenes n Eck besteht aus n Punkten (Eckpunkten), welche in einerlei Ebene, von welchen aber keine drei in einer und derselben Geraden liegen, und den $\frac{n(n-1)}{2}$ Geraden (Seiten), deren jede zwei von den n Punkten mit einander verbindet. In jedem Eckpunkte schneiden $n-1$ Seiten, daher die Anzahl aller Seiten $\frac{n(n-1)}{2}$ ist.

Ein vollständiges ebenes n Seit besteht aus n in einerlei Ebene liegenden Geraden (Seiten), von welchen keine drei durch einen und denselben Punkt gehen, und den $\frac{n(n-1)}{2}$ Punkten (Eckpunkten), in deren jedem zwei von den n Geraden sich schneiden. In jeder Seite liegen $n-1$ Eckpunkte, daher die Anzahl aller Eckpunkte $\frac{n(n-1)}{2}$ ist.

81. Wenn in zwei reciproken Sätzen der ebenen Geometrie dem Ausdrucke n Eck derselbe Ausdruck gegenübersteht, so versteht es sich von selbst, dass ein n Eck gemeint sey, welches zugleich ein n Seit ist. Dasselbe ist der Fall, wenn von den Diagonalen eines n Ecks gesprochen wird.

Die vier Seiten und die beiden Diagonalen eines Vierecks sind die sechs Seiten eines vollständigen Vierecks. Je zwei Seiten, welche nicht durch einen und denselben Eckpunkt gehen, heissen einander gegenüberliegend.

Die vier Eckpunkte eines Vierecks und die beiden Punkte, in deren jedem ein Paar Gegenseiten sich schneiden, sind die sechs Eckpunkte eines vollständigen Vierseits. Je zwei Eckpunkte, welche nicht in einer und derselben Seite liegen, heissen einander gegenüberliegend.

82. Ist ein ebenes System ein Schnitt eines Strahlenbündels, so entspricht jedem n Ecke, welches zugleich ein n Seit ist, ein

n Kant, welches zugleich ein n Seit ist, jedem vollständigen n Ecke ein vollständiges n Kant, jedem vollständigen n Seite ein vollständiges n Seit. Ist von den Eckpunkten oder von den Kanten eines n Seits die Rede, so versteht es sich von selbst, dass im erstern Falle ein ebenes n Seit, im letztern aber ein n Seit im Strahlenbündel gemeint sey.

Die vier Seiten und die beiden Diagonalen (Diagonalebenen) eines Vierkants sind die sechs Seiten eines vollständigen Vierkants.

Die vier Kanten eines Vierkants und die beiden Geraden, in deren jeder ein Paar Gegenseiten sich schneiden, sind die sechs Kanten eines vollständigen Vierseits.

83. Unter einem n Ecke, welches zugleich n Flach ist, versteht man den Inbegriff von n Punkten (Eckpunkten), den n Geraden (Seiten, Kanten), deren jede zwei aufeinanderfolgende Eckpunkte verbindet, und den n Ebenen (Flächen), deren jede durch drei aufeinanderfolgende Eckpunkte geht. Man denkt sich hiebei die n Punkte in einer bestimmten Aufeinanderfolge, so dass auf den letzten wieder der erste folgt, und setzt voraus, dass keine vier aufeinanderfolgende in einerlei Ebene liegen.

Wenn in einem Sechsecke, welches zugleich Sechsflach ist, je zwei einander gegenüberliegende Seiten (Kanten) sich schneiden, so gehen die drei Geraden, deren jede ein Paar Gegenpunkte verbindet, (als Schnittlinien von drei Ebenen) durch einen und denselben Punkt, während die drei Geraden, in deren jeder ein Paar Gegenflächen sich schneiden, (als Verbindungslinien von drei Punkten) in einer und derselben Ebene liegen.

84. Ein vollständiges n Eck im Raume besteht aus n Punkten (Eckpunkten), von welchen keine vier in einerlei Ebene liegen, den Geraden (Kanten), deren jede zwei, und den Ebenen (Flächen), deren jede drei von den n Punkten verbindet. In jedem Eckpunkte schneiden sich n—1 Kanten, in jeder Kante n—2 Flä-

Ein vollständiges n Flach besteht aus n Ebenen (Flächen), von welchen keine vier durch einen und denselben Punkt gehen, den Geraden (Kanten), in deren jeder zwei, und den Punkten (Eckpunkten), in deren jedem drei von den n Ebenen sich schneiden. In jeder Fläche liegen n—1 Kanten, in jeder Kan-

chen, daher die Anzahl aller Kanten $\frac{n(n-1)}{2}$ und die Anzahl aller Flächen $\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}$ ist.

te $n = 2$ Eckpunkte, daher die Anzahl aller Kanten $\frac{n(n-1)}{2}$ und die Anzahl aller Eckpunkte $\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}$ ist.

Ist $n = 4$, so wird das Gebilde gewöhnlich nach der Anzahl seiner Flächen ein Tetraeder genannt. — In der Bedeutung von §. 4 sind die Ausdrücke n Eck, n Kant, n Flach in der Folge nur dann zu nehmen, wenn solches ausdrücklich bemerkt wird, oder von einem Umfange oder Mantel u. s. w. die Rede ist.

85. Die vier Eckpunkte und sechs Kanten eines Tetraeders werden aus jedem Mittelpunkte, welcher in keiner seiner Flächen liegt, durch die vier Kanten und sechs Seiten eines vollständigen Vierkants projicirt.

Die vier Flächen und sechs Kanten eines Tetraeders werden von jeder Ebene, welche durch keinen seiner Eckpunkte geht, in den vier Seiten und sechs Eckpunkten eines vollständigen Vierseits geschnitten.

Anm. Wo Punkt und Ebene einander gegenüberstehen, steht das vollständige ebene n Eck dem vollständigen n Seite im Strahlenbündel und das vollständige ebene n Seit dem vollständigen n Kante gegenüber.

86. Die zehn Kanten und zehn Flächen eines vollständigen Fünfecks im Raume sind die Kanten und Flächen von fünf Tetraedern und zugleich (85) die Kanten und Seiten von fünf vollständigen Vierkanten, und werden daher von jeder Ebene, welche durch keinen der fünf Eckpunkte geht, in den zehn Eckpunkten und den zehn Seiten von fünf vollständigen Vierseiten und fünf vollständigen Vierecken geschnitten.

Die zehn Kanten und zehn Eckpunkte eines vollständigen Fünfflachs sind die Kanten und Eckpunkte von fünf Tetraedern und zugleich die Seiten und Eckpunkte von fünf vollständigen Vierseiten, und werden daher aus jedem Mittelpunkte, welcher in keiner der fünf Flächen liegt, durch die zehn Seiten und zehn Kanten von fünf vollständigen Vierkanten und fünf vollständigen Vierseiten projicirt.

87. Zwei ebene n Ecke heissen auf einander bezogen, wenn

jedem Eckpunkte eines jeden ein Eckpunkt des andern, welcher jenem entsprechend (homolog) heisst, und dadurch auch jeder Seiten eines jeden eine Seite des andern zugewiesen ist. Analoges gilt von n Seiten, n Kanten u. s. w.

Wenn zwei auf einander bezogene Dreiecke in zwei Ebenen liegen, deren Schnittlinie mit keiner der sechs Seiten zusammenfällt, aber je zwei homologe Seiten sich schneiden (in einerlei Ebene liegen), so sind die beiden Dreiecke Schnitte eines und desselben Dreikants.

Wenn zwei auf einander bezogene Dreikante zwei Strahlenbündeln angehören, deren gemeinschaftlicher Strahl mit keiner der sechs Kanten zusammenfällt, aber je zwei homologe Kanten sich schneiden (einen Punkt gemein haben), so sind die beiden Dreikante Scheine eines und desselben Dreiechs.

88. Wenn zwei auf einander bezogene vollständige ebene Vierecke in zwei Ebenen liegen, deren Schnittlinie durch keinen der acht Eckpunkte geht, und fünf Seiten des einen Vierecks die homologen Seiten des andern schneiden, so sind die beiden Vierecke Schnitte eines und desselben vollständigen Vierkants, daher auch ihre beiden übrigen Seiten sich schneiden.

Wenn zwei auf einander bezogene vollständige Vierseite zwei Strahlenbündeln angehören, deren gemeinschaftlicher Strahl in keiner der acht Seiten liegt, und fünf Kanten des einen Vierseits die homologen Kanten des andern schneiden, so sind die beiden Vierseite Scheine eines und desselben vollständigen ebenen Vierseits, daher auch ihre beiden übrigen Kanten sich schneiden.

Folgt aus 87, wenn man bemerkt, dass Dreikante, welche zwei Kanten gemein haben, concentrisch sind, Dreiecke aber, welche zwei Seiten gemein haben, in einerlei Ebene liegen.

89. Zwei in einerlei Ebene liegende n Ecke oder n Seite, welche auf einander bezogen sind, heissen zu einander perspektivisch (perspektivisch liegend), wenn sie von einem und demselben dritten ebenen n Ecke oder n Seite N die Projektionen (aus zwei Punkten M, M_1) sind, und also die Geraden, deren jede ein Paar homologe Eckpunkte jener Gebilde verbindet, alle durch einen und denselben Punkt (die Spur der Geraden MM_1) gehen,

die Punkte aber, in deren jedem ein Paar homologe Seiten sich schneiden, alle in einer und derselben Geraden (der Spur der Ebene N) liegen.

90. Wenn zwei auf einander bezogene Dreiecke ABC, $A_1B_1C_1$ in einerlei Ebene liegen, aber kein Element mit einander gemein haben, und

die drei Punkte, in deren jedem ein Paar homologe Seiten sich schneiden, in einer und derselben Geraden u liegen, welche von keinem der beiden Dreiecke eine Seite ist, so liegen die Dreiecke perspektivisch, daher auch die drei Geraden, deren jede ein Paar homologe Eckpunkte verbindet, in einem Punkte sich schneiden. — Projicirt man nämlich das Dreieck ABC auf irgend eine andere durch die Gerade u gehende Ebene, so erhält man ein drittes Dreieck $A_2B_2C_2$, von welchem (nach 87) auch das Dreieck $A_1B_1C_1$ eine Projektion ist.

die drei Geraden, deren jede ein Paar homologe Eckpunkte verbindet, in einem und demselben Punkte S sich schneiden, welcher von keinem der beiden Dreiecke ein Eckpunkt ist, so liegen die Dreiecke perspektivisch, daher auch die drei Punkte, in deren jedem ein Paar homologe Seiten sich schneiden, in einer Geraden liegen. — Projicirt man nämlich das Dreieck ABC aus irgend einem Punkte M und das Dreieck $A_1B_1C_1$ aus einem andern Punkte M_1 der Geraden MS, so erhält man zwei Dreikante, welche (87) Scheine eines und desselben dritten Dreiecks $A_2B_2C_2$ sind.

Es kommen in den obigen Sätzen, welche im Grunde nur durch die Form der Aussage sich von einander unterscheiden, zehn Punkte und zehn Gerade vor, welche die Spuren von den zehn Kanten und den zehn Flächen eines vollständigen Fünfecks im Raume und daher auch die Eckpunkte und Seiten von zehn Paar perspektivischen Dreiecken sind. Anstatt zu sagen: die drei Punkte D, E, F, in welchen die Seiten AB, AC, BC des Dreiecks ABC von den homologen Seiten des Dreiecks $A_1B_1C_1$ geschnitten werden, liegen in einer Geraden, kann man auch sagen: die drei Geraden, deren jede ein Paar homologe Eckpunkte der Dreiecke BB_1D, CC_1E verbindet, schneiden sich in einem Punkte.

91. Wenn zwei auf einander bezogene vollständige Vierecke in einerlei Ebene liegen, und eine Gerade u, welche durch keinen ihrer Eckpunkte geht, von fünf Seiten des einen Vierecks in denselben Punkten geschnitten wird, in welchen die homologen Seiten des andern sie schneiden, so liegen die Vierecke perspektivisch, daher auch ihre beiden übrigen Seiten jene Gerade in einem und demselben Punkte schneiden u. s. w.

Wenn zwei auf einander bezogene vollständige Vierseite in einerlei Ebene liegen, und aus einem Punkte S, welcher in keiner ihrer Seiten liegt, fünf Eckpunkte des einen Vierseits durch dieselben Strahlen projicirt werden, welche aus ihm die homologen Eckpunkte des andern projiciren, so liegen die Vierseite perspektivisch, daher auch ihre beiden übrigen Eckpunkte aus jenem Punkte durch einen und denselben Strahl projicirt werden u. s. w.

Diese Sätze lassen sich eben so auf 88 zurückführen, wie die vorigen auf 87 zurückgeführt wurden.

92. Wenn zwei Tetraeder, welche kein Element mit einander gemein haben, auf einander bezogen sind, und die vier Geraden (p), deren jede ein Paar homologe Eckpunkte verbindet, durch einen und denselben Punkt gehen, welcher von keinem der beiden Tetraeder ein Eckpunkt ist, so liegen die vier Geraden (q), in deren jeder ein Paar homologe Flächen sich schneiden, in einer und derselben Ebene, welche von keinem der beiden Tetraeder eine Fläche ist; und umgekehrt. Zwei solche Tetraeder heissen zu einander perspektivisch.

Gehen die Geraden (p) durch einen und denselben Punkt, welcher von keinem der beiden Tetraeder ein Eckpunkt ist, so schneiden sich auch (68) je zwei homologe Kanten in einem Punkte, welcher von keinem der Tetraeder ein Eckpunkt ist. Da ferner von den sechs Punkten, in deren jedem ein Paar homologe Kanten sich schneiden, je

Liegen die Geraden (q) in einer und derselben Ebene, welche von keinem der beiden Tetraeder eine Fläche ist, so liegen auch (68) je zwei homologe Kanten in einerlei Ebene, welche von keinem der beiden Tetraeder eine Fläche ist. Da ferner von den sechs Ebenen, deren jede ein Paar homologe Kanten verbindet, je drei, welche

drei, welche in einer und derselben Fläche des einen Tetraeders liegen, auch in der homologen Fläche des andern und mithin in einer und derselben Geraden liegen, so sind jene sechs Punkte die Eckpunkte eines vollständigen Vierseits, dessen Seiten die Geraden (q) sind.

durch einen und denselben Eckpunkt des einen Tetraeders gehen, auch durch den homologen Eckpunkt des andern und mithin durch eine und dieselbe Gerade gehen, so sind jene sechs Ebenen die Seiten eines vollständigen Vierkants, dessen Kanten die Geraden (p) sind.

Es kommen hier 15 Punkte, 20 Gerade und 15 Ebenen in Betrachtung, welche die Eckpunkte, Kanten und Flächen von 15 Paar perspektivischen Tetraedern, dann von 6 vollständigen Fünfecken und 6 vollständigen Fünfflachen sind. Die 10 Eckpunkte und die 10 Kanten eines jeden dieser Fünfflache liegen in den 10 Kanten und den 10 Flächen des vollständen Fünfecks, welches die fünf übrigen von den 15 Punkten zu Eckpunkten hat.

---

§. 8.

Harmonische Gebilde.

93. Wenn in einer Geraden drei Punkte A, B, C gegeben sind, und alsdann ein Viereck so construirt wird, dass eine Diagonale durch den zweiten der gegebenen Punkte geht, in jedem der beiden übrigen aber zwei einander gegenüberliegende Seiten sich schneiden, so schneidet die andere Diagonale des Vierecks jene Gerade in einem vierten Punkte D, welcher durch die drei gegebenen Punkte bestimmt ist und zu denselben der vierte harmonische Punkt heisst. Ist nämlich EFGH ein anderes Viereck, von welchem eine Diagonale EG durch den Punkt B geht, ein Paar einander gegenüberliegende Seiten EF, GH im Punkte A und die beiden übrigen Seiten FG, HE im Punkte C sich schneiden, so schneidet seine andere Diagonale (nach 88 und 91) die Gerade AB in demselben Punkte D, in welchem diese Linie von der andern Diagonale des erstern Vierecks geschnitten wird.

Die Punkte A, C sind durch die Punkte B, D getrennt. Betrachtet man nämlich das ebene System, dessen Träger die Ebene ACE ist, als Schnitt eines gewöhnlichen Strahlenbündels S,

so entspricht der aus den drei Strecken CHE, EFA, ABC zusammengesetzten Linie der Mantel der dreiseitigen Strahlenpyramide, welche die drei Strahlen SC, SE, SA zu Kanten hat und den Strahl SG in sich enthält Da nun die Gerade HF die Strecken CHE, EFA und also die Ebene SHF die diesen Strecken entsprechenden Seiten der erwähnten Strahlenpyramide schneidet, so folgt, dass die dritte Seite von der Ebene SHF und also auch die Strecke ABC von der Geraden HF nicht geschnitten werde.

94. Ein harmonisches gerades Gebilde ABCD wird aus jedem ausserhalb der Geraden befindlichen Punkte S durch einen harmonischen Strahlenbüschel projicirt, welcher nämlich von jeder Geraden, die mit ihm in einerlei Ebene liegt, aber nicht durch seinen Mittelpunkt geht, in einem harmonischen geraden Gebilde $A_1 B_1 C_1 D_1$ geschnitten wird.

Man construire in einer Ebene, welche durch die Gerade AB aber nicht durch den Punkt S geht, ein Viereck, so dass zwei einander gegenüberliegende Seiten desselben im Punkte A, die beiden übrigen Seiten im Punkte C sich schneiden, eine Diagonale durch den Punkt B und also die andere durch den Punkt D geht. Projicirt man nun dieses Viereck aus dem Punkte S auf eine durch die Gerade $A_1 B_1$ gehende Ebene, so erhält man ein Viereck, von welchem zwei einander gegenüberliegende Seiten im Punkte A_1, die beiden übrigen Seiten im Punkte C_1 sich schneiden, die eine Diagonale durch den Punkt B_1 und die andere durch den Punkt D_1 geht, was zu beweisen war.

95. Ein harmonisches gerades Gebilde ABCD wird aus jeder Axe s, welche mit ihm nicht in einerlei Ebene liegt, ein harmonischer Strahlenbüschel also aus jedem ausserhalb seiner Ebene befindlichen Punkte durch einen harmonischen Ebenenbüschel projicirt, welcher nämlich von jeder Geraden, die seine Axe nicht schneidet, in einem harmonischen geraden Gebilde $A_1 B_1 C_1 D_1$ und also von jeder Ebene, die nicht durch seine Axe geht, in einem harmonischen Strahlenbüschel geschnitten wird.

Man nehme in der Axe s zwei beliebige Punkte an und projicire aus dem einen das Gebilde ABCD und aus dem andern das Gebilde $A_1 B_1 C_1 D_1$, so erhält man zwei Strahlenbüschel,

welche (74) Scheine eines und desselben dritten geraden Gebildes $A_2B_2C_2D_2$ sind. Da nun das Gebilde ABCD harmonisch ist, so gilt diess auch (94) von dem Gebilde $A_2B_2C_2D_2$ und mithin auch von dem Gebilde $A_1B_1C_1D_1$.

96. Wenn ABCD ein harmonisches Gebilde ist, so sind auch BCDA, CDAB, DABC, DCBA, CBAD, BADC, ADCB harmonische Gebilde.

Es sey ABCD ein harmonisches gerades Gebilde, so kann man ein Viereck EFGH construiren, so dass die Seiten EF, GH im Punkte A, die Seiten FG, HE im Punkte C sich schneiden, die Diagonale EG durch den Punkt B und die Diagonale FH durch den Punkt D geht, woraus sogleich erhellt, dass auch ADCB, CDAB, CBAD harmonische Gebilde sind. Es sey ferner K der Schnittpunkt von EG und FH, so sind (90) EFC, DBK zwei zu einander perspektivische Dreiecke, daher die drei Geraden ED, FB, CK in einem und demselben Punkte L sich schneiden. Bemerkt man nun, dass von dem Vierecke EKFL zwei einander gegenüberliegende Seiten im Punkte B, die beiden übrigen im Punkte D sich schneiden, die eine Diagonale durch A und die andere durch C geht, so folgt, dass auch BADC, BCDA, DABC, DCBA harmonische Gebilde sind.

97. Nach dem Bisherigen ist durch drei Elemente eines harmonischen Gebildes und durch die Angabe, von welchem derselben das vierte getrennt ist, auch das vierte bestimmt. Wenn daher ABCD, abcd zwei ungleichartige harmonische Gebilde sind, und die Elemente A, B, C bezüglich in den Elementen a, b, c liegen, so ist das erstere Gebilde ein Schnitt des letztern.

Liegen drei Punkte A, B, C eines harmonischen geraden Gebildes ABCD in drei gegebenen Ebenen, welche in einer und derselben Geraden sich schneiden, so liegt auch der vierte Punkt in einer gegebenen, durch diese Gerade gehenden Ebene.

Schneiden drei Ebenen a, b, c eines harmonischen Ebenenbüschels abcd eine Gerade in gegebenen Punkten, so wird diese Gerade auch von der vierten Ebene in einem gegebenen Punkte geschnitten.

98. Je zwei getrennte Elemente eines harmonischen Gebildes sollen durch die beiden übrigen harmonisch getrennt heissen. Ist

das eine von zwei harmonischen Gebilden ein Schnitt des andern, so kann man auch sagen, dass je zwei getrennte Elemente eines jeden durch die ihnen nicht entsprechenden Elemente des andern harmonisch getrennt sind.

Durch zwei Ebenen und einen ausserhalb derselben befindlichen Punkt ist eine dritte Ebene bestimmt, welche durch die Schnittlinie der beiden erstern geht und jeden Punkt enthält, der von dem gegebenen Punkte durch die gegebenen Ebenen harmonisch getrennt ist.

Durch eine Ebene und zwei ausserhalb derselben befindliche Punkte ist ein dritter Punkt bestimmt, in welchem jede Ebene, welche von der gegebenen Ebene durch die gegebenen Punkte harmonisch getrennt ist, die durch diese Punkte bestimmte Gerade schneidet.

Man kann hier für die Ausdrücke: Ebene, Schnittlinie, die Ausdrücke: Gerade, Schnittpunkt setzen, wenn man nur Elemente einer und derselben Ebene betrachtet.

99. Die beiden Diagonalen eines ebenen Vierecks sind (93) durch die beiden Punkte, die beiden Diagonalen, eines Vierkants also durch die beiden Strahlen, in deren jedem ein Paar Gegenseiten sich schneiden, harmonisch getrennt.

In einem vollständigen ebenen Vierecke sind je zwei Gegenseiten durch die beiden Punkte, in deren jedem von den vier übrigen Seiten zwei einander gegenüberliegende sich schneiden, harmonisch getrennt.

In einem vollständigen Vierseite sind je zwei Gegenpunkte durch die beiden Geraden, deren jede von den vier übrigen Eckpunkten zwei einander gegenüberliegende verbindet, harmonisch getrennt.

100. Wenn von zwei zu einander perspektivischen Dreiecken das eine ABC um das andere $A_1 B_1 C_1$ und also dieses in das erstere beschrieben ist, so dass nämlich die Eckpunkte A_1, B_1, C_1 beziehlich in den Seiten BC, CA, AB liegen, so ist (99)

der Punkt S, welcher mit je zwei homologen Eckpunkten in einer und derselben Geraden liegt, von jedem Punkte, in welchem ein Paar homologe Seiten sich schneiden, sowohl durch die

die Gerade u, welche je zwei homologe Seiten in einem und demselben Punkte schneidet, von jeder Geraden, welche ein Paar homologe Eckpunkte verbindet, sowohl durch die übrigen Eck-

übrigen Seiten des einen als auch durch die übrigen Seiten des andern Dreiecks harmonisch getrennt.

Projicirt man den Punkt S aus jedem Eckpunkte des Dreiecks $A_1 B_1 C_1$ auf die diesem Eckpunkte gegenüberliegende Seite, so erhält man die Eckpunkte eines Dreiecks $A_2 B_2 C_2$, welches mit den beiden Dreiecken ABC, $A_1 B_1 C_1$ perspektivisch liegt, und in das letztere beschrieben ist. Je drei homologe Seiten der drei Dreiecke schneiden sich in einem und demselben Punkte, weil es in jeder Seite des Dreiecks $A_1 B_1 C_1$ nur einen Punkt giebt, welcher durch die beiden übrigen Seiten desselben vom Punkte S harmonisch getrennt ist.

punkte des einen als auch durch die übrigen Eckpunkte des andern Dreiecks harmonisch getrennt.

Projicirt man jeden Punkt, in welchem die Gerade u von einer Seite des Dreiecks ABC geschnitten wird, aus dem dieser Seite gegenüberliegenden Eckpunkte, so erhält man die Seiten eines Dreiecks $A^1 B^1 C^1$, welches mit den beiden Dreiecken ABC, $A_1 B_1 C_1$ perspektivisch liegt, und um das erstere beschrieben ist. Je drei homologe Eckpunkte der drei Dreiecke liegen in einer und derselben Geraden, weil es durch jeden Eckpunkt des Dreiecks ABC nur eine Gerade giebt, welche durch die beiden übrigen Eckpunkte desselben von der Geraden u harmonisch getrennt ist.

Durch irgend eines von den beiden Dreiecken ABC, $A_1 B_1 C_1$ und irgend eines von den beiden Elementen S, u ist auch das andere Dreieck, so wie auch das andere der erwähnten Elemente bestimmt.

101. Wenn von zwei zu einander perspektivischen Tetraedern das eine $ABCD$ um das andere $A_1 B_1 C_1 D_1$ und also dieses in das erstere beschrieben ist, so dass nämlich die Eckpunkte A_1, B_1, C_1, D_1 beziehlich in den Flächen BCD, ACD, ABD, ABC liegen, so ist (99)

der Punkt S, welcher mit je zwei homologen Eckpunkten in einer und derselben Geraden liegt, von jedem Punkte, in welchem ein Paar homologe Kan-

die Ebene U, welche je zwei homologe Flächen in einer und derselben Geraden schneidet, von jeder Ebene, welche ein Paar homologe Kanten verbindet, so-

ten sich schneiden, sowohl durch zwei Flächen des einen als auch durch zwei Flächen des andern Tetraeders harmonisch getrennt.

Projicirt man den Punkt S aus jedem Eckpunkte des Tetraeders $A_1 B_1 C_1 D_1$ auf die diesem Eckpunkte gegenüberliegende Fläche, so erhält man die Eckpunkte eines Tetraeders $A_2 B_2 C_2 D_2$, welches mit den beiden Tetraedern ABCD, $A_1 B_1 C_1 D_1$ perspektivisch liegt, und in das letztere beschrieben ist. Je drei homologe Kanten der drei Tetraeder schneiden sich in einem und demselben Punkte, weil es in jeder Kante des Tetraeders $A_1 B_1 C_1 D_1$ nur einen Punkt giebt, welcher durch die in der gegenüberliegenden Kante sich schneidenden Flächen vom Punkte S harmonisch getrennt ist.

wohl durch zwei Eckpunkte des einen als auch durch zwei Eckpunkte des andern Tetraeders harmonisch getrennt.

Projicirt man jede Gerade, in welcher die Ebene U von einer Fläche des Tetraeders ABCD geschnitten wird, aus dem dieser Fläche gegenüberliegenden Eckpunkte, so erhält man die Flächen eines Tetraeders $A^1 B^1 C^1 D^1$, welches mit den beiden Tetraedern ABCD, $A_1 B_1 C_1 D_1$ perspektivisch liegt, und um das erstere beschrieben ist. Je drei homologe Kanten der drei Tetraeder liegen in einerlei Ebene, weil es durch jede Kante des Tetraeders ABCD nur eine Ebene giebt, welche durch die in der gegenüberliegenden Kante befindlichen Eckpunkte von der Ebene U harmonisch getrennt ist.

Durch irgend eines von den beiden Tetraedern ABCD, $A_1 B_1 C_1 D_1$ und irgend eines von den beiden Elementen S, U ist auch das andere Tetraeder so wie auch das andere von den erwähnten Elementen bestimmt.

102. Versteht man unter der Projektion eines Punktes auf eine Seite eines Dreiecks seine Projektion aus dem dieser Seite gegenüberliegenden Eckpunkte und unter der Projektion eines Punktes auf eine Kante eines Tetraeders seine Projektion aus der derselben gegenüberliegenden Kante, so hat man (nach 100 und 101) folgende Sätze:

Wenn in jeder Seite eines Dreiecks zwei Punkte angenommen werden, welche durch die in derselben Seite befindlichen Eckpunkte harmonisch getrennt sind, und von den sechs angenommenen Punkten drei

die Projektionen eines und desselben Punktes sind, so sind die drei übrigen die Spuren einer und derselben Geraden.

die Spuren einer und derselben Geraden sind, so sind die drei übrigen die Projektionen eines und desselben Punktes.

Wenn in jeder Kante eines Tetraeders zwei Punkte angenommen werden, welche durch die in derselben Kante befindlichen Eckpunkte harmonisch getrennt sind, und von den zwölf angenommenen Punkten sechs

die Projektionen eines und desselben Punktes sind, so sind die sechs übrigen die Spuren einer und derselben Ebene.

die Spuren einer und derselben Ebene sind, so sind die sechs übrigen die Projektionen eines und desselben Punktes.

---

§. 9.

Projektivische Verwandtschaft zwischen einförmigen Gebilden.

103. Zwei einförmige Grundgebilde heissen zu einander projektivisch (π), wenn sie so auf einander bezogen sind, dass jedem harmonischen Gebilde in dem einen ein harmonisches Gebilde im andern entspricht.

Wenn von beliebig vielen Gebilden das zweite dem ersten, jedes folgende einem der vorhergehenden projektivisch ist, so sind alle zu einander projektivisch. Dieser Satz gilt nicht nur von einförmigen, sondern auch, wie aus spätern Erklärungen hervorgehen wird, von andern Gebilden, daher er auch, um Wiederholungen zu vermeiden, sogleich allgemein ausgesprochen wurde.

104. Zwei projektivische einförmige Gebilde können überdiess perspektivisch liegen. Es heissen aber zu einander perspektivisch, nämlich projektivisch und zugleich perspektivisch liegend:

α) ein gerades Gebilde und ein Büschel oder ein Strahlenbüschel und ein Ebenenbüschel, wenn das eine Gebilde ein Schnitt des andern ist;

β) zwei gerade Gebilde, wenn sie Schnitte eines und desselben Strahlenbüschels sind;

γ) zwei Strahlenbüschel, wenn sie entweder Scheine eines und desselben geraden Gebildes oder Schnitte eines und desselben Ebenenbüschels oder beides zugleich sind;

δ) zwei Ebenenbüschel, wenn sie Scheine eines und desselben Strahlenbüschels sind.

105. Projicirt man in einer Ebene

ein gerades Gebilde u aus zwei Punkten S_1, S_2 auf eine und dieselbe andere Gerade v, so erhält man zwei zu einander projektivische gerade Gebilde u_1, u_2, welche in einer und derselben Geraden v liegen und einen oder zwei Punkte entsprechend gemein haben, je nachdem die Geraden u, v, $S_1 S_2$ in einem Punkte oder in drei Punkten sich schneiden.

zwei gerade Gebilde, welche Schnitte eines und desselben Strahlenbüschels sind, aus einem und demselben andern Punkte, so erhält man zwei zu einander projektivische Strahlenbüschel, welche concentrisch sind und einen oder zwei Strahlen entsprechend gemein haben, je nachdem der Schnittpunkt der geraden Gebilde mit den beiden Mittelpunkten der drei Büschel in einer oder nicht in einer und derselben Geraden liegt.

Dem Punkte A_1 des Gebildes u_1 entspricht der Punkt A_2 des Gebildes u_2, wenn die Strahlen $S_1 A_1$, $S_2 A_2$ die Gerade u in einem und demselben Punkte A schneiden. Die drei Gebilde u, u_1, u_2 haben also den Punkt uv, die beiden Gebilde u_1, u_2 aber, wenn die Gerade v von der Geraden $S_1 S_2$ in einem von uv verschiedenen Punkte geschnitten wird, auch noch diesen Punkt entsprechend gemein.

106. Wenn zwei projektivische einförmige Gebilde drei Elemente entsprechend gemein haben, so haben sie alle ihre Elemente entsprechend gemein.

Es ist hier hinreichend, zwei projektivische gerade Gebilde zu betrachten, welche in einer und derselben Geraden liegen. Haben nun die Gebilde die Punkte A, B und jeden Punkt der Strecke AB entsprechend gemein, so haben sie auch (103) jeden Punkt, welcher von einem Punkte dieser Strecke durch die Punkte A, B harmonisch getrennt ist, nämlich jeden Punkt der Strecke B·A entsprechend gemein. Würden aber die Gebilde keine stetige Aufeinanderfolge von Elementen, jedoch mehr als zwei einzelne Elemente entsprechend gemein haben, so würde, wenn A, B zwei aufeinanderfolgende sind, die eine von den beiden Strecken

AB, B·A gar kein, die andere aber wenigstens ein sich selbst entsprechendes Element P enthalten, was auf einen Widerspruch führt, da es in der Strecke AB einen Punkt Q giebt, welcher vom Punkte P durch die Punkte A, B harmonisch getrennt ist. Zwei projektivische einförmige Gebilde können also, wenn nicht jedes Element des einen mit dem homologen Elemente des andern zusammenfallen soll, höchstens zwei Elemente entsprechend gemein haben.

107. Wenn ein gerades Gebilde und ein Büschel oder ein Strahlenbüschel und ein Ebenenbüschel zu einander projektivisch sind, und drei Elemente des einen Gebildes in den ihnen entsprechenden Elementen des andern liegen (also das eine Gebilde mit einem Schnitte des andern drei Elemente entsprechend gemein hat), so ist (106) das eine Gebilde ein Schnitt des andern.

108. Wenn zwei projektivische gerade Gebilde u, u_1, welche in einerlei Ebene, aber nicht in einer und derselben Geraden liegen, ihren Schnittpunkt A entsprechend gemein haben, so sind sie Schnitte eines und desselben Strahlenbüschels. — Es sey S der Schnittpunkt von zwei Geraden BB_1, CC_1, deren jede einen Punkt des Gebildes u mit dem homologen Punkte des Gebildes u_1 verbindet. Da nun (103) der Strahlenbüschel, welcher aus dem Punkte S das gerade Gebilde u_1 projicirt, auch dem geraden Gebilde u projektivisch ist, und drei Punkte A, B, C dieses Gebildes in den homologen Strahlen des Büschels liegen, so folgt der Satz aus 107.

Haben zwei projektivische Strahlenbüschel, welche concentrisch

Wenn zwei projektivische Strahlenbüschel S, S_1, welche in einerlei Ebene liegen, aber nicht concentrisch sind, den Strahl a, welcher ihre Mittelpunkte verbindet, entsprechend gemein haben, so sind sie Scheine eines und desselben geraden Gebildes. — Man verbinde den Schnittpunkt $b\,b_1$ von zwei homologen Strahlen mit dem Schnittpunkte $c\,c_1$ von zwei andern homologen Strahlen durch eine Gerade. Da nun (103) der Schnitt u des Büschels S_1 mit jener Geraden auch dem Büschel S projektivisch ist, und drei Strahlen a, b, c dieses Büschels durch die ihnen entsprechenden Punkte des geraden Gebildes u gehen, so folgt der Satz aus 107.

Haben zwei projektivische Ebenenbüschel, deren Axen sich

sind, aber in zwei Ebenen liegen, die Schnittlinie dieser Ebenen entsprechend gemein, so sind sie Schnitte eines und desselben Ebenenbüschels.

109. Wenn zwei projektivische gerade Gebilde in einerlei Ebene, aber nicht in einer und derselben Geraden liegen, und von den Geraden, deren jede ein Paar homologe Punkte verbindet, irgend drei in einem Punkte sich schneiden, so sind die beiden geraden Gebilde Schnitte eines und desselben Strahlenbüschels. Sind also zwei sich schneidende gerade Gebilde projektivisch, ohne perspektivisch zu liegen, so schneiden sich von den Geraden, deren jede ein Paar homologe Punkte verbindet, keine drei in einem Punkte.

schneiden, die durch diese Linien bestimmte Ebene entsprechend gemein, so sind sie Scheine eines und desselben Strahlenbüschels.

Wenn zwei projektivische Strahlenbüschel in einerlei Ebene liegen, aber nicht concentrisch sind, und von den Punkten, in deren jedem ein Paar homologe Strahlen sich schneiden, irgend drei in einer Geraden liegen, so sind die beiden Büschel Scheine eines und desselben geraden Gebildes. Sind also zwei in einerlei Ebene liegende, nicht concentrische Strahlenbüschel projektivisch, ohne perspektivisch zu liegen, so liegen von den Punkten, in deren jedem ein Paar homologe Strahlen sich schneiden, keine drei in einer Geraden.

Die Beweise dieser Sätze, welchen zwei Sätze aus der Geometrie des Strahlenbündels entsprechen, stimmen mit den vorigen ganz überein.

110. Will man zwei einförmige Grundgebilde projektivisch auf einander beziehen, so kann man zu drei Elementen des einen drei Elemente des andern, welche jenen entsprechen sollen, nach Belieben annehmen, wodurch aber alsdann jedem Elemente des einen Gebildes ein Element im andern zugewiesen ist.

I. Sollen zwei sich schneidende gerade Gebilde u, u_1 projektivisch so auf einander bezogen werden, dass sie ihren Schnittpunkt A entsprechend gemein haben und den Punkten B, C des einen die Punkte B_1, C_1 des andern entsprechen, so muss (108) das eine eine Projektion des andern aus dem Punkte seyn, in welchem die Geraden BB_1, CC_1 sich schneiden.

II. Sollen zwei gerade Gebilde u, u_2, welche nicht in einer und derselben Geraden liegen, projektivisch so auf einander bezogen werden, dass den Punkten A, B, C des erstern die Punkte A_2, B_2, C_2 des letztern entsprechen, so projicire man aus einem Punkte S, welcher ausserhalb der beiden Gebilde, aber mit zwei Punkten A, A_2, die einander entsprechen sollen, in einer und derselben Geraden liegt, das Gebilde u_2 auf eine Gerade u_1, welche die Gerade u im Punkte A und die Gerade u_2 in irgend einem von A_2 verschiedenen Punkte schneidet. Da nun die geraden Gebilde u_1, u_2 projektivisch auf einander bezogen sind, so ist dieser Fall auf den vorigen, nämlich darauf zurückgeführt, die Gebilde u, u_1 projektivisch so auf einander zu beziehen, dass den Punkten A, B, C des erstern die Punkte A, B_1, C_1 des letztern entsprechen, welche von den Punkten A_2, B_2, C_2 die Projektionen sind. Gehen die drei Geraden AA_2, BB_2, CC_2 durch einen und denselben Punht M, so muss (109) u eine Projektion von u_2 aus dem Punkte M seyn.

III. Sollen zwei gerade Gebilde u, u_3, welche in einer und derselben Geraden liegen, projektivisch so auf einander bezogen werden, dass den Punkten A, B, C des erstern die Punkte A_3, B_3, C_3 des letztern entsprechen, so darf man nur, um diesen Fall auf II zurückzuführen, das Gebilde u_3 auf irgend eine andere Gerade u_2 projiciren. Ist etwa A mit A_3 identisch, so kann man diesen Fall, indem man die Projektionslinie durch den Punkt A legt, sogleich auf I zurückführen.

IV. Die Fälle, in welchen ein gerades Gebilde und ein Büschel oder zwei Büschel projektivisch so auf einander bezogen werden sollen, dass drei bestimmten Elementen des einen Gebildes drei bestimmte Elemente des andern entsprechen, lassen sich, da für jeden Büschel sein Schnitt mit einer Geraden substituirt werden kann, auf die bereits betrachteten zurückführen.

III. Zwei projektivische gerade Gebilde u, u_1, welche in einer und derselben Geraden liegen und einen Punkt A entsprechend gemein haben, können als Projektionen eines und

Zwei projektivische concentrische Strahlenbüschel S, S_1, welche in einerlei Ebene liegen und einen Strahl a entsprechend gemein haben, können als Scheine von zwei geraden Gebilden be-

desselben dritten geraden Gebildes betrachtet werden. Projicirt man nämlich das gerade Gebilde u aus irgend einem Punkte M und das gerade Gebilde u_1 aus einem andern Punkte M_1 der Geraden MA, so erhält man zwei zu einander projektivische Strahlenbüschel, welche den Strahl MM_1 entsprechend gemein haben und also (108) Scheine eines und desselben dritten Gebildes u_2 sind.

trachtet werden, welche Schnitte eines und desselben dritten Büschels sind. Wird nämlich der Büschel S von irgend einer Geraden v und der Büschel S_1 von einer andern durch den Punkt a v gehenden Geraden v_1 geschnitten, so erhält man zwei zu einander projektivische gerade Gebilde, welche den Punkt $v v_1$ entsprechend gemein haben und also Schnitte eines und desselben Strahlenbüschels sind.

Wenn die Gerade u_2, welche von je zwei homologen Strahlen MB, $M_1 B_1$ der Büschel M, M_1 in einem und demselben Punkte geschnitten wird, nicht durch den Punkt A geht, so haben die Gebilde u, u_1 noch einen Punkt entsprechend gemein. Sollen also zwei in einer und derselben Geraden befindliche gerade Gebilde (oder zwei concentrische Strahlenbüschel, welche in einerlei Ebene liegen, oder zwei Ebenenbüschel, welche eine gemeinschaftliche Axe haben) projektivisch so aufeinander bezogen werden, dass sie nur ein Element A, welches gegeben ist, entsprechend gemein haben, so kann man nur noch zu einem Elemente B des einen Gebildes das homologe Element B_1 des andern nach Belieben annehmen.

In 104 wurde noch nicht beachtet, dass projektivische gerade Gebilde in einer und derselben Geraden liegen können. Zwei solche Gebilde heissen perspektivisch liegend, wenn wenigstens ein Element des einen mit dem homologen Elemente des andern zusammenfällt. Eben so heissen zwei Strahlenbüschel, welche concentrisch sind und zugleich in einerlei Ebene liegen, so wie auch zwei Ebenenbüschel, welche eine gemeinschaftliche Axe haben, perspektivisch liegend, wenn sie wenigstens ein Element entsprechend gemein haben.

112. Aus 110 geht hervor, dass zwei projektivische gerade Gebilde, wenn sie auch nicht Schnitte eines und desselben Strahlenbüschels sind, doch als das erste und letzte von drei oder vier

geraden Gebilden betrachtet werden können, von welchen jedes folgende eine Projektion des vorhergehenden aus einem Punkte ist. Es ist hierdurch nicht nur der Ausdruck „projektivisch" erklärt, sondern zugleich bewiesen, dass jeder stetigen Aufeinanderfolge von Elementen in dem einen von zwei zu einander projektivischen einförmigen Gebilden eine stetige Aufeinanderfolge von Elementen im andern entspricht.

Wenn in zwei zu einander projektivischen einförmigen Gebilden u, u_1 zwei homologe Elemente sich bewegen, so dass sie nämlich immer homologe Elemente bleiben, so muss, wenn das eine Element das Gebilde u beschreibt, das andere das Gebilde u_1 beschreiben. Sind u, u_1 zwei in einer und derselben Geraden liegende gerade Gebilde oder zwei concentrische Strahlenbüschel, welche überdiess in einerlei Ebene liegen, oder zwei Ebenenbüschel, welche eine gemeinschaftliche Axe haben, so sollen sie einstimmig- oder entgegengesetzt-projektivisch heissen, je nachdem zwei sich bewegende homologe Elemente in einem und demselben Sinne oder im entgegengesetzten Sinne sich bewegen. Im letztern Falle haben die Gebilde offenbar zwei Elemente entsprechend gemein, durch welche je zwei homologe Elemente getrennt sind. Liegt ein Stück AB (eine Strecke AB oder ein Winkel AB) des Gebildes u in dem ihm entsprechenden Stücke A_1B_1 des Gebildes u_1, ohne dass eines von den beiden Elementen A, B mit dem ihm entsprechenden Elemente zusammenfällt, so kann man ebenfalls schliessen, dass die Gebilde zwei Elemente entsprechend gemein haben, von welchen das eine in dem Stücke AB und das andere in dem Stücke A_1B_1 liegt, welches dem Stücke $A{\cdot}B$ entspricht.

113. Wenn einem Dreiecke ein anderes einbeschrieben ist, so giebt es unendlich viele Dreiecke, deren jedes in das letztere und zugleich um das erstere beschrieben ist.

Bezieht man nämlich (110) die drei geraden Gebilde, welche die Seiten des letztern Dreiecks zu Trägern haben, projektivisch so aufeinander, dass sie von jeder Seite des erstern Dreiecks in homologen Punkten geschnitten werden, so sind je drei andere homologe Punkte die Eckpunkte eines Dreiecks, welches in das letztere und zugleich (108) um das erstere beschrieben ist.

114. Wenn die n Eckpunkte eines ebenen n Ecks in festen Geraden sich bewegen, welche alle durch einen und denselben Punkt S gehen, während n − 1 Seiten desselben um feste Punkte sich drehen, so dreht sich auch (108) die noch übrige Seite um einen festen Punkt. Die n Eckpunkte des n Ecks sind nämlich homologe Punkte von n zu einander projektivischen geraden Gebilden, welche alle den Punkt S entsprechend gemein haben. — Zwei nicht aufeinanderfolgende Eckpunkte können auch in einer Geraden sich bewegen. Bewegen sie sich aber in zwei Geraden, so dreht sich auch die sie verbindende Diagonale um einen festen Punkt.

Wenn in einer Ebene die n Seiten eines n Ecks um feste Punkte sich drehen, welche alle in einer und derselben Geraden u liegen, während n—1 Eckpunkte in festen Geraden sich bewegen, so bewegt sich auch der noch übrige Eckpunkt in einer festen Geraden. Die Seiten des n Ecks sind nämlich homologe Strahlen von n zu einander projektivischen Strahlenbüscheln, welche alle den Strahl u entsprechend gemein haben. — Zwei nicht aufeinanderfolgende Seiten können auch um einen Punkt sich drehen. Drehen sie sich aber um zwei Punkte, so bewegt sich auch ihr Schnittpunkt in einer festen Geraden.

Ein besonderer Fall vom Satze rechter Hand ist:

Wenn die Richtungen der vier Seiten eines ebenen Vierecks gegeben sind, und drei Eckpunkte in gegebenen eigentlichen Geraden liegen, von welchen keine mit einer von den beiden Seiten, deren Schnittpunkt sie enthält, einerlei Richtung hat, so liegt auch der vierte Eckpunkt des Vierecks in einer gegebenen Geraden.

115. Wenn zwei projektivisch gerade Gebilde u, u_1 nicht in einerlei Ebene liegen, so erfüllen die Geraden (V), deren jede ein Paar homologe Punkte verbindet, eine geschlossene Regelfläche R, welche auch noch von einer andern Schaar U von Geraden erfüllt wird.

Jede Gerade der einen Schaar schneidet jede Gerade der andern Schaar, während von den Geraden, welche einer und derselben Schaar angehören, keine zwei sich schneiden.

Jeder Punkt, welcher in einer Geraden der einen Schaar liegt, liegt auch in einer Geraden der andern Schaar.

Jede Ebene, welche durch eine Gerade der einen Schaar geht, geht auch durch eine Gerade der andern Schaar.

Es seyen v, v_1, v_2 drei Gerade der Schaar V. Projicirt man nun die geraden Gebilde u, u_1 aus einer Axe u_2, welche die drei Geraden v, v_1, v_2 schneidet, so erhält man zwei zu einander projektivische Ebenenbüschel, welche die drei Ebenen u_2v, u_2v_1, u_2v_2 und folglich (106) alle ihre Elemente entsprechend gemein haben, daher jede Gerade der Schaar V, weil die homologen Punkte, die sie verbindet, mit der Geraden u_2 in einerlei Ebene liegen, diese Gerade schneidet, und umgekehrt jede Gerade, welche die drei Geraden u, u_1, u_2 schneidet, der Schaar V angehört, mithin jeder Punkt der Geraden u_2 in einer Geraden dieser Schaar liegt. Was aber so eben von der Geraden u_2 gesagt wurde, gilt von jeder Geraden, welche irgend drei Gerade der Schaar V schneidet (der Schaar U angehört).

Zwei projektivische Ebenenbüschel u, u_1, deren Axen u, u_1 nicht in einerlei Ebene liegen, erzeugen ebenfalls eine Regelfläche der obigen Art. Jede Gerade nämlich, in welcher ein Paar homologe Ebenen der Büschel sich schneiden, verbindet auch ein Paar homologe Punkte der geraden Gebilde u, u_1, von welchen das erstere ein Schnitt des Büschels u_1 mit der Geraden u und das letztere ein Schnitt des Büschels u mit der Geraden u_1 ist.

Anstatt von zwei zu einander projektivischen Gebilden auszugehen, kann man auch drei Gerade u, u_1, u_2 annehmen, von welchen keine zwei in einerlei Ebene liegen. Durch jede Gerade v, welche die drei angenommenen Geraden schneidet, sind drei Ebenen vu, vu_1, vu_2 und drei Punkte vu, vu_1, vu_2 bestimmt. Nennt man nun je sechs solche Elemente einander entsprechend, so hat man die drei Ebenenbüschel u, u_1, u_2 und die drei geraden Gebilden u, u_1, u_2 projektivisch aufeinander bezogen.

116. Werden zwei Gebilde G, G_1, von welchen etwa jedes nur aus einzelnen Elementen besteht, projektivisch genannt, so heisst diess nicht anderes, als dass zwei Grundgebilde projektivisch so aufeinander bezogen werden können, dass dem Gebilde G in dem einen das Gebilde G_1 im andern entspricht. Ist also $ABCD$

π abcd, so ist auch BCDA π BCDA, ACDB π acdb u. s. w.

Zwei einförmige Gebilde, deren jedes aus drei Elementen besteht, sind (110) immer zu einander projektivisch. Die Aussage aber, dass zwei einförmige Gebilde ABCDE..., abcde..., deren jedes aus n Elementen besteht, zu einander projektivisch sind, vertritt, da durch das eine Gebilde und drei Elemente des andern auch die übrigen Elemente des andern bestimmt sind, die Stelle von n — 3 von einander unabhängigen Aussagen, in deren jeder nämlich nur vier Elemente des einen Gebildes und vier Elemente des andern in Betrachtung kommen. Ist z. B.

1) ABCD π abcd
und 2) ACDE π acde
so ist auch ABCDE π abcde
mithin auch ABDE π abde
BCDE π bcde
u. s. w.
Ist ferner 3) CDEF π cdef
so ist auch ABCDEF π abcdef
ADEF π adef
u. s. w.

117. Alle harmonischen Gebilde sind (nach 110 und 103) zu einander projektivisch. Und wenn das eine von zwei zu einander projektivischen einförmigen Gebilden, deren jedes aus vier Elementen besteht, harmonisch ist, so ist auch das andere harmonisch.

118. Wenn das eine von zwei zu einander projektivischen einförmigen Gebilden ABCD, CBAD, deren jedes aus vier Elementen besteht, aus dem andern durch Vertauschung zweier Elemente hervorgeht, so sind diese durch die beiden übrigen harmonisch getrennt.

Es sey ABCD ein gerades Gebilde und HKFD seine Projektion auf eine andere durch den Punkt D gehende Gerade aus einem Punkte G. Wenn nun CBAD π ABCD und mithin auch CBAD π HKFD ist, so schneiden sich (108) die Geraden CH, BK, AF in einem und demselben Punkte, woraus (93) der Satz folgt. Bemerkt wird noch, dass (116) die Aussagen: ABCD π

CBAD, ACBD π CABD, BDAC π BDCA u. s. w. alle mit einander übereinstimmen.

119. Jedes einförmige Gebilde ABCD, welches aus vier Elementen besteht, ist, wenn zwei derselben, so wie auch die beiden übrigen mit einander vertauscht werden, dieser seiner Permutation projektivisch.

Es sey ABCD ein gerades Gebilde, EFGD seine Projektion auf eine andere durch den Punkt D gehende Gerade aus einem Punkte M und N der Schnittpunkt der Geraden MC, AF, so ist von den vier Gebilden ABCD, EFGD, MNGC, BADC das zweite eine Projektion des ersten aus dem Punkte M, das dritte eine Projektion des zweiten aus dem Punkte A und das vierte eine Projektion des dritten aus dem Punkte F, daher auch ABCD π BADC ist. Eben so wird bewiesen, dass ABCD π CDAB π DCBA (oder ACBD π CADB und ADBC π DACB) ist.

Ist also abcd π ABCD, so ist auch abcd π BADC π CDAB π DCBA.

120. Wenn zwei projektivische einförmige Gebilde MNAB, MNA_1B, deren jedes aus vier Elementen besteht, zwei Elemente entsprechend gemein haben, und von den vier übrigen Elementen zwei, welche weder einander entsprechen noch einem und demselben von den beiden Gebilden angehören, mit einander vertauscht werden, so entstehen wieder zwei projektivische Gebilde $MNAA_1$, $MNBB_1$.

Es seyen MNAB, MNA_1B_1 zwei projektivische gerade Gebilde, so sind die beiden Strahlenbüschel, von welchen der eine das gerade Gebilde MNAB aus einem Punkte S und der andere das gerade Gebild MNA_1B_1 aus einem andern Punkte S_1 der Geraden MS projicirt, Scheine eines und desselben dritten geraden Gebildes $M_2NA_2B_2$. Bemerkt man nun, dass die Gebilde $MNAA_1$, $MNBB_1$ Projektionen des Gebildes MM_2SS_1 aus den Punkten A_2, B_2 sind, so folgt der Satz.

Liegen die Punkte A, A_1 in der Strecke MN, die Punkte B, B_1 aber in der Strecke MN, so muss, wenn in der erstern Strecke auf den Punkt A der Punkt A_1 folgt, in der letztern auf den Punkt B der Punkt B_1 oder, was dasselbe ist, in der

Strecke N·M auf den Punkt B_1 der Punkt B folgen. Es sind alsdann MANB, MA_1NB_1 homologe Gebilde von zwei einstimmig-perspektivischen, hingegen MAA_1N, MBB_1N homologe Gebilde von zwei entgegengesetzt-perspektivischen Grundgebilden.

---

§. 10.

Projektivische Verwandtschaft zwischen Grundgebilden der zweiten Stufe und zwischen räumlichen Systemen.

121. Zwei Grundgebilde der zweiten Stufe oder auch zwei räumliche Systeme heissen $\left\{\begin{matrix}\text{collineär}\\ \text{reciprok}\end{matrix}\right\}$, wenn sie so aufeinander bezogen sind, dass je zwei ungleichartigen Elementen P, q des einen Systems, von welchen das erstere P im letztern liegt, zwei ungleichartige Elemente P_1, q_1 des andern entsprechen, von welchen das erstere P_1 $\left\{\begin{matrix}\text{ebenfalls im letztern liegt}\\ \text{durch das letztere geht}\end{matrix}\right\}$. Wenn also den Elementen A, B des einen Systems die Elemente A_1, B_1 des andern entsprechen, und durch die beiden erstern Elemente ein drittes Element AB bestimmt ist, so muss auch durch die Elemente A_1, B_1 ein Element A_1B_1 bestimmt seyn, welches dem Elemente AB entspricht.

Zwei Systeme, welche einem und demselben dritten reciprok sind, sind unter sich collineär, daher in der Betrachtung von reciproken Systemen die Betrachtung von collineären Systemen, wenn nicht auf eine besondere Lage derselben Rücksicht genommen wird, begriffen ist. Handelt es sich nur von Grundgebilden der zweiten Stufe, so kann man, wenn ihre Lage zu einander nicht in Betrachtung kommt, für jeden Büschel irgend einen Schnitt desselben substituiren, damit man es nur mit ebenen Systemen zu thun habe.

In zwei reciproken ebenen Systemen entspricht jedem geraden Gebilde ein Strahlenbüschel, jedem vollständigen nEcke ein vollständiges nSeit u. s. w. In zwei reciproken räumlichen Systemen entspricht jedem geraden Gebilde ein Ebenenbüschel, je-

dem Strahlenbüschel ein Strahlenbüschel, jedem ebenen Systeme ein ihm reciproker Strahlenbündel, jedem vollständigen ebenen n Ecke ein vollständiges n Seit im Strahlenbündel, jedem vollständigen ebenen n Seite ein vollständiges n Kant u. s. w.

122. Zwei Systeme, welche entweder collineär oder reciprok sind, heissen auch zu einander projektivisch, weil in beiden Fällen jedem harmonischen Gebilde in dem einen Systeme ein harmonisches Gebilde im andern entspricht, und also (103) je zwei homologe einförmige Gebilde zu einander projektivisch sind. So entspricht z. B. in zwei reciproken ebenen Systemen jedem harmonischen geraden Gebilde $ABCD$ ein harmonischer Strahlenbüschel $A_1 B_1 C_1 D_1$, da jedem vollständigen Vierecke, von welchem ein Paar Gegenseiten im Punkte A, ein Paar Gegenseiten im Punkte C sich schneiden, eine Seite durch den Punkt B und eine Seite durch den Punkt D geht, ein vollständiges Vierseit entspricht, von welchem jede der Geraden A_1, C_1 ein Paar Gegenpunkte, jede der Geraden B_1, D_1 aber einen der übrigen Eckpunkte enthält.

In zwei reciproken ebenen Systemen entspricht jeder Strecke AB ein Winkel $A_1 B_1$, jeder Geraden, welche die Strecke AB schneidet, ein Pnnkt, welcher in dem Winkel $A_1 B_1$ liegt, u. s. w. In zwei reciproken räumlichen Systemen entspricht jeder Strecke AB ein Flächenwinkel $A_1 B_1$, jeder Ebene, welche die Strecke AB schneidet, ein Punkt, welcher in dem Flächenwinkel $A_1 B_1$ liegt, jedem ebenen Winkel, welcher die Strecke AB projicirt, ein ebener Winkel, welcher von dem Flächenwinkel $A_1 B_1$ ein Schnitt ist, u. s. w.

Haben zwei projektivische Systeme drei Elemente eines und desselben einförmigen Gebildes entsprechend gemein, so haben sie (106) alle Elemente desselben entsprechend gemein.

123. Wenn zwei collineäre Grundgebilde der zweiten Stufe vier gleichartige Elemente, von welchen keine drei einem und demselben einförmigen Grundgebilde angehören, entsprechend gemein haben, so haben sie alle ihre Elemente entsprechend gemein. Haben z. B. zwei collineäre ebene Systeme die vier Eckpunkte und also auch (121) die sechs Seiten eines vollständigen Vierecks entsprechend gemein, so haben sie (122) jede Gerade, welche

durch einen Eckpunkt des Vierecks geht, und mithin jeden Punkt (Schnittpunkt von zwei solchen Geraden) entsprechend gemein. Es gehört hieher auch noch folgender Satz:

Wenn ein ebenes System einem Strahlenbündel collineär ist, und vier gleichartige Elemente des erstern Systems, von welchen keine drei einem und demselben einförmigen Grundgebilde angehören, in den homologen Elementen des letztern liegen, so ist das ebene System ein Schnitt des Strahlenbündels.

124. Wenn zwei collineäre räumliche Systeme vier gleichartige Elemente, von welchen keine drei einem und demselben einförmigen Grundgebilde, welche aber alle vier einem und demselben Grundgebilde der zweiten Stufe angehören, entsprechend gemein haben, so haben sie (123) alle Elemente dieses Gebildes entsprechend gemein. Haben zwei collineäre Systeme fünf Punkte, von welchen keine vier in einerlei Ebene liegen, oder fünf Ebenen, von welchen keine vier durch einen und denselben Punkt gehen, entsprechend gemein, so haben sie alle Elemente entsprechend gemein. Die beiden Systeme haben nämlich, um nur den einen Fall zu betrachten, jede Gerade, welche zwei der fünf Punkte verbindet, mithin nach dem erstern Satze auch jede Gerade, welche durch einen der fünf Punkte geht, und folglich jeden Punkt (Schnittpunkt von solchen Geraden) entsprechend gemein.

125. Zwei collineäre Systeme können überdiess perspektivisch liegen. Es heissen nämlich zu einander perspektivisch:

a) ein ebenes System und ein Strahlenbündel, wenn das erstere System ein Schnitt des letztern ist.

b) Zwei ebene Systeme, welche nicht in einerlei Ebene liegen, wenn sie Schnitte eines und desselben Strahlenbündels sind.

c) Zwei in einerlei Ebene liegende collineäre Systeme, wenn sie ein gerades Gebilde und einen Strahlenbüschel (alle Elemente dieser Gebilde) entsprechend gemein haben.

d) Zwei nicht concentrische Strahlenbündel, wenn sie Scheine eines und desselben ebenen Systems sind.

e) Zwei collineäre concentrische Strahlenbündel, wenn sie einen Strahlenbüschel und einen Ebenenbüschel entsprechend gemein haben.

f) Zwei collineäre räumliche Systeme, wenn sie ein ebenes System und einen Strahlenbündel entsprechend gemein haben.

Aus diesen Erklärungen folgt, dass in zwei perspektivischen Systemen je zwei homologe einförmige Gebilde und in zwei perspektivischen räumlichen Systemen auch je zwei homologe Grundgebilde der zweiten Stufe zu einander perspektivisch sind.

126. Wenn zwei collineäre ebene Systeme, welche nicht in einerlei Ebene liegen, drei Punkte und folglich (122) alle Punkte ihrer Schnittlinie entsprechend gemein haben, so sind sie Schnitte eines und desselben Strahlenbündels. Da nämlich (68) von den Geraden, deren jede ein Paar homologe Punkte verbindet, je zwei sich schneiden, so gehen (69) alle durch einen und denselben Punkt.

Wenn zwei collineäre nicht concentrische Strahlenbündel drei Ebenen und folglich alle Ebenen, welche beiden angehören, entsprechend gemein haben, so sind sie Scheine eines und desselben ebenen Systems. Da nämlich von den Geraden, in deren jeder ein Paar homologe Ebenen sich schneiden, je zwei in einerlei Ebene liegen, so liegen alle in einer und derselben Ebene.

127. Projicirt man ein ebenes System aus zwei Punkten auf eine und dieselbe andere Ebene, so erhält man zwei perspektivische ebene Systeme, welche in einerlei Ebene liegen. Die drei Systeme haben ein gerades Gebilde, die beiden letztern auch noch den Strahlenbüschel entsprechend gemein, dessen Mittelpunkt mit den beiden Projektionspunkten in einer und derselben Geraden liegt.

Projicirt man zwei ebene Systeme, welche Schnitte eines und desselben Strahlenbündels sind, aus einem und demselben andern Punkte, so erhält man zwei perspektivische Strahlenbündel, welche concentrisch sind. Die drei Bündel haben einen Ebenenbüschel, die beiden letztern auch noch den Strahlenbüschel entsprechend gemein, welcher die Schnittlinie der beiden ebenen Systeme projicirt.

128. Zwei in einerlei Ebene liegende collineäre Systeme, welche

ein gerades Gebilde entsprechend gemein haben, haben auch einen Strahlenbüschel entsprechend gemein haben, haben auch ein gerades Gebilde ent-

sprechend gemein. — Projicirt man nämlich das eine System auf eine andere durch die Gerade u gehende Ebene, so erhält man ein drittes System, von welchem (126) auch das zweite eine Projektion ist, woraus (127) der Satz folgt.

sprechend gemein. — Projicirt man nämlich das eine System aus irgend einem Punkte M und das andere aus einem andern Punkte der Geraden S M, so erhält man (126) zwei Strahlenbündel, welche Scheine eines und desselben dritten ebenen Systems sind, woraus (127) der Satz folgt.

Aus diesen Beweisen und dem vorigen Satze geht hervor, dass die Erklärung 125, c mit der in 89 übereinstimmt.

Haben zwei collineäre concentrische Strahlenbündel einen Strahlenbüschel entsprechend gemein, so haben sie auch einen Ebenenbüschel entsprechend gemein; und umgekehrt.

129. Will man zwei Grundgebilde der zweiten Stufe projektivisch aufeinander beziehen, so darf man nur auf zwei einförmige Grundgebilde A, B des einen, welche ein Element AB gemein haben, zwei einförmige Grundgebilde A_1, B_1 des andern, welche ebenfalls ein Element A_1B_1 gemein haben, projektivisch so beziehen, dass das gemeinschaftliche Element A_1B_1 der beiden letztern Gebilde als Element eines jeden dem gemeinschaftlichen Elemente der beiden erstern entspricht.

I. Sollen zwei ebene Systeme U, U_1 reciprok aufeinander bezogen werden, so darf man nur auf zwei Strahlenbüschel A, B des einen zwei gerade Gebilde A_1, B_1 des andern projektivisch so beziehen, dass der Schnittpunkt A_1B_1 der beiden geraden Gebilde als Punkt eines jeden dem gemeinschaftlichen Strahle AB der beiden Büschel entspricht. Jedem Punkte, in welchem ein Strahl des Büschels A von einem Strahle des Büschels B geschnitten wird, entspricht eine Gerade, deren Spuren in den Geraden A_1, B_1 jenen Strahlen entsprechen. Jedem geraden Gebilde s, welches entweder ein Schnitt des Büschels A mit einer durch den Punkt B gehenden Geraden oder ein Schnitt des Büschels B mit einer durch den Punkt A gehenden Geraden oder ein gemeinschaftlicher Schnitt von beiden ist, entspricht ein Strahlenbüschel s_1, welcher im ersten Falle das gerade Gebilde A_1 aus

einem Punkte der Geraden B_1, im zweiten das gerade Gebilde B_1 aus einem Punkte der Geraden A_1, im dritten aber (108) das eine von diesen Gebilden auf das andere projicirt. Im letzten Falle sind nämlich durch die Gerade s die beiden Büschel A, B und dadurch auch die geraden Gebilde A_1, B_1 projektivisch so auf einander bezogen, dass ihr gemeinschaftliches Element sich selbst entspricht. Schneiden zwei Gerade s, t des Systems U die Gerade AB in einem und demselben Punkte, so liegen die ihnen entsprechenden Punkte s_1, t_1 des Systems U_1 mit dem Punkte $A_1 B_1$ in einer und derselben Geraden, weil, wenn diess nicht der Fall wäre, die Gerade $s_1 t_1$ einem Punkte st ausserhalb der Geraden AB entsprechen würde. Es ist hiernach auch jedem Punkte in der Geraden AB eine durch den Punkt $A_1 B_1$ gehende Gerade zugewiesen.

II. Sollen zwei ebene Systeme collineär aufeinander bezogen werden, so muss man entweder auf zwei Strahlenbüschel A, B des einen zwei Strahlenbüschel A_1, B_1 des andern oder auf zwei gerade Gebilde A, B des einen zwei gerade Gebilde A_1, B_1 des andern projektivisch so beziehen, dass das gemeinschaftliche Element der Gebilde A_1, B_1 als Element eines jeden dem gemeinschaftlichen Elemente der Gebilde A, B entspricht. Im erstern Falle entspricht jedem Punkte, in welchem ein Strahl des Büschels A und ein Strahl des Büschels B sich schneiden, ein Punkt, in welchem die ihnen entsprechenden Strahlen der Büschel A_1, B_1 sich schneiden, u. s. w. Im letztern Falle entspricht jeder Geraden, welche die geraden Gebilde A, B in zwei Punkten schneidet, eine Gerade, welche durch die ihnen entsprechenden Punkte der Gebilde A_1, B_1 bestimmt ist, u. s. w.

III. Will man ein ebenes System und einen Strahlenbündel reciprok aufeinander beziehen, so wird man entweder auf zwei Strahlenbüschel A, B des erstern Systems zwei Strahlenbüschel A_1, B_1 des letztern oder auf zwei gerade Gebilde A, B des erstern zwei Ebenenbüschel A_1, B_1 des letztern projektivisch so beziehen, dass das gemeinschaftliche Element $A_1 B_1$ der Gebilde A_1, B_1 als Element eines jeden dem gemeinschaftlichen Elemente AB der Gebilde A, B entspricht. Im erstern Falle entspricht jedem Punkte, in welchem ein Strahl des Büschels A und ein

Strahl des Büschels B sich schneiden, eine Ebene, deren Spuren in den Ebenen A_1, B_1 jenen Punkten entsprechen, u. s. w. Im letztern Falle entspricht jeder Geraden, welche die geraden Gebilde A, B in zwei Punkten schneidet, ein Strahl, in welchem die diesen Punkten entsprechenden Ebenen der Büschel A_1, B_1 sich schneiden, u. s. w.

In dem obigen allgemeinen Satze sind noch drei Sätze IV, V, VI enthalten, von welchen der eine von einem ebenen Systeme und einem ihm collineären Strahlenbündel, der andere von zwei reciproken und der dritte von zwei collineären Strahlenbündeln handelt.

130. Will man zwei Grundgebilde der zweiten Stufe projektivisch aufeinander beziehen, so kann man zu vier gleichartigen Elementen A, B, C, D des einen, von welchen keine drei einem und demselben einförmigen Grundgebilde angehören, vier solche Elemente A_1, B_1, C_1, D_1 im andern, welche jenen entsprechen sollen, nach Belieben annehmen, wodurch aber alsdann jedem Elemente des einen Systems ein Element des andern zugewiesen ist.

Um sich hievon zu überzeugen, darf man nur bemerken, dass auf die einförmigen Gebilde A, B die einförmigen Gebilde A_1, B_1 projektivisch so bezogen werden können und müssen, dass den Elementen AB, AC, AD des Gebildes A die Elemente A_1B_1, A_1C_1, A_1D_1 des Gebildes A_1 und den Elementen BA, BC, BD des Gebildes B die Elemente B_1A_1, B_1C_1, B_1D_1 des Gebildes B_1 entsprechen.

Ein vollständiges ebenes Viereck und ein vollständiges Vierseit sind hiernach immer reciprok. In der Aussage, dass ein vollständiges ebenes nEck und ein vollständiges nSeit, welche aufeinander bezogen sind, reciprok seyen, sind (116) $2(n-4)$ von einander unabhängige einfache Aussagen enthalten. Es müssen nämlich zwei Strahlenbüschel, deren jeder aus $n-1$ Seiten des nEcks besteht, den ihnen entsprechenden geraden Gebilden, deren jedes aus nEckpunkten des nSeits besteht, projektivisch seyn.

131. Will man zwei in einerlei Ebene liegende Systeme perspektivisch so aufeinander beziehen, dass sie einen gegebenen Strahlenbüschel S und ein gegebenes gerades Gebilde u entsprechend gemein haben, so kann man noch in einem Strahle des

Büschels S zu einem Punkte A des einen Systems den homologen Punkt A_1 des andern nach Belieben annehmen. Wenn man nämlich jeden Strahl des Büschels S sich selbst entsprechend nennt, die Strahlenbüschel A, A_1 aber als Scheine des geraden Gebildes u betrachtet, so hat man auf zwei Strahlenbüschel S, A des einen Systems zwei Strahlenbüschel S, A_1 des andern projektivisch so bezogen, dass der gemeinschaftliche Strahl der beiden letztern als Strahl eines jeden dem gemeinschaftlichen Strahle der beiden erstern entspricht.

Der Punkt S, welcher mit je zwei homologen Punkten in einer und derselben Geraden liegt, kann das (perspektivische) Projectionscentrum, die Gerade u aber, welche von je zwei homologen Geraden in einem und demselben Punkte geschnitten wird, die (perspektivische) Spurlinie der beiden Systeme genannt werden.

132. Um zwei räumliche Systeme Σ, Σ_1 reciprok aufeinander zu beziehen, darf man nur irgend eine von folgenden drei Verfahrungsarten anwenden, die sich jedoch nicht wesentlich von einander unterscheiden:

I. Man beziehe auf drei Ebenenbüschel a, b, c, deren Axen die Seiten eines Dreiecks sind, drei gerade Gebilde a_1, b_1, c_1, deren Träger die Kanten eines Dreikants sind, projektivisch so, dass der Schnittpunkt der drei letztern Gebilde als Punkt eines jeden der gemeinschaftlichen Ebene der drei erstern und also jedem Punkte, in welchem eine Ebene des Büschels a, eine Ebene des Büschels b und eine Ebene des Büschels c sich schneiden, eine Ebene entspricht, deren Spuren in den Geraden a_1, b_1, c_1 jenen Ebenen entsprechen.

II. Man beziehe auf einen Strahlenbündel A und einen ausserhalb desselben befindlichen Ebenenbüschel a ein ebenes System A_1 und ein ausserhalb desselben befindliches gerades Gebildes a_1 projektivisch so, dass der Schnittpunkt der beiden letzten Gebilde als Punkt eines jeden der gemeinschaftlichen Ebene der beiden erstern und also jedem Punkte, in welchem ein Strahl des Bündels A von einer Ebene des Büschels a geschnitten wird, eine Ebene entspricht, deren Spuren in der Ebene A_1 und in der Geraden a_1 jenen Elementen entsprechen.

III. Man beziehe auf zwei Strahlenbündel A, B zwei ebene Systeme A_1, B_1 projektivisch so, dass jeder gemeinschaftlichen Ebene der beiden erstern Systeme, man mag sie als Ebene des einen oder als Ebene des andern betrachten, ein und derselbe gemeinschaftliche Punkt der beiden letztern und also jedem Punkte, in welchem ein Strahl des Bündels A und ein Strahl des Bündels B sich schneiden, eine Ebene entspricht, deren Spuren in den Ebenen A_1, B_1 jenen Strahlen entsprechen. Es entspricht alsdann ferner jedem ebenen Systeme U, welches entweder ein Schnitt des Strahlenbündels A mit einer durch den Punkt B gehenden Ebene oder ein Schnitt des Strahlenbündels B mit einer durch den Punkt A gehenden Ebene oder ein gemeinschaftlicher Schnitt von beiden ist, ein Strahlenbündel U_1, welcher im ersten Falle das ebene System A_1 aus einem Punkte der Ebene B_1, im zweiten das ebene System B_1 aus einem Punkte der Ebene A_1 und im dritten (126) das eine von diesen beiden Systemen auf das andere projicirt, da in diesem Falle durch die Ebene U die beiden Strahlenbündel A, B und dadurch auch die beiden ebenen Systeme A_1, B_1 collineär so aufeinander bezogen sind, dass sie jedes gemeinschaftliche Element entsprechend gemein haben. Schneiden zwei Ebenen U, V die Gerade AB in einem und demselben Punkte P oder, was dasselbe ist, eine durch die Gerade AB gehende Ebene R in einer und derselben Geraden, so gehen alle Ebenen, welche die den ebenen Systemen U, V entsprechenden Strahlenbündel U_1, V_1 mit einander gemein haben, durch einen und denselben Punkt R_1 der Geraden A_1B_1, woraus man schliessen kann, dass die beiden Punkte U_1, V_1, mit der Geraden A_1B_1 in einerlei Ebene P_1 liegen. Es ist hiernach auch jedem Punkte P in der Geraden AB eine durch die Gerade A_1B_1 gehende Ebene P_1 zugewiesen.

Da nach 129 ein Strahlenbündel A und ein ebenes System A_1 reciprok aufeinander bezogen sind, wenn auf zwei Ebenenbüschel b, c des erstern Systems zwei Gebilde b_1, c_1 des letztern projektivisch so bezogen sind, dass der Schnittpunkt dieser Geraden als Punkt einer jeden der gemeinschaftlichen Ebene der beiden Büschel entspricht, so sind in jedem der drei obigen Verfahrungsarten, aus welchen von selbst hervorgeht, wie man räum-

liche Systeme collineär aufeinander beziehen kann, die beiden übrigen enthalten.

133. Will man zwei räumliche Systeme reciprok aufeinander beziehen, so kann man zu fünf Punkten A, B, C, D, E des einen, von welchen keine vier in einerlei Ebene liegen, fünf Ebenen A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 des andern, von welchen keine vier durch einen und denselben Punkt gehen, nach Belieben annehmen, wodurch aber alsdann jedem Elemente des einen Systems ein Element des andesn zugewiesen ist. Man kann und muss nämlich auf den Strahlenbündel A das ebene System A_1 projektivisch so beziehen, dass den Strahlen AB, AC, AD, AE die Geraden A_1B_1, A_1C_1, A_1D_1, A_1E_1 entsprechen. Ferner können und müssen der Ebenenbüschel BC (dessen Axe die Gerade BC ist) und das gerade Gebilde B_1C_1 projektivisch so aufeinander bezogen werden, dass den Ebenen BCA, BCD, BCE die Punkte $B_1C_1A_1$, $B_1C_1D_1$, $B_1C_1E_1$ entsprechen, woraus (132) der Satz folgt.

Sollen zwei räumliche Systeme collineär aufeinander bezogen werden, so kann man entweder zu fünf Punkten des einen, von welchen keine vier in einerlei Ebene liegen, fünf solche Punkte des andern, oder zu fünf Ebenen des einen, von welchen keine vier durch einen und denselben Punkt gehen, fünf solche Ebenen des andern nach Belieben annehmen, wodurch aber alsdann jedem Elemente des einen Systems ein Element des andern zugewiesen ist.

Ein vollständiges räumliches Fünfeck und ein vollständiges Fünfflach sind nach dem Obigen immer reciprok. In der Aussage, dass ein vollständiges räumliches nEck und ein vollständiges nFlach, welche aufeinander bezogen sind, reciprok seyen, sind $3(n-5)$ von einander unabhängige einfache Aussagen enthalten. Es ist nämlich erforderlich, aber auch hinreichend, dass drei Ebenenbüschel, welche eine Ebene mit einander gemein haben, und von welchen jeder aus $n-2$ Flächen des vollständigen nEcks besteht, den ihnen entsprechenden geraden Gebilden, von welchen jedes aus $n-2$ Eckpunkten des vollständigen nflachs besteht, projektivisch sind.

134. Zwei collineäre räumliche Systeme, welche

ein ebenes System U entspre-	einen Strahlenbündel S entspre-

chend gemein haben, haben auch einen Strahlenbündel entsprechend gemein.

Die Ebene U wird von je zwei homologen Ebenen in einer und derselben Geraden und von je zwei homologen Geraden in einem und demselben Punkte geschnitten, daher (126) je zwei homologe ebene Systeme V, V_1 Schnitte eines und desselben Strahlenbündels S sind. Da nun jede Gerade, welche ein Paar homologe Punkt A, A_1 verbindet, weil sie auch durch einen Punkt R der Ebene U geht, sich selbst (die Gerade AR der Geraden A_1 R) entspricht, so folgt der Satz.

chend gemein haben, haben auch ein ebenes System entsprechend gemein.

Der Punkt S liegt mit je zwei homologen Punkten A, A_1 in einer und derselben Geraden und mit je zwei homologen Geraden in einerlei Ebene, daher (126) je zwei homologe Strahlenbündel A, A_1 Scheine eines und desselben ebenen Systems U sind. Da nun jede Gerade, in welcher ein Paar homologe Ebenen V, V_1 sich schneiden, weil sie auch in einer Ebene N des Strahlenbündels S liegt, sich selbst (die Gerade VN der Geraden V_1 N) entspricht, so folgt der Satz.

Auf analoge Weise hätten auch die in 128 enthaltenen Sätze bewiesen werden können.

135. Sollen zwei räumliche Systeme perspektivisch so aufeinander bezogen werden, dass sie einen gegebenen Strahlenbündel S und ein gegebenes ebenes System U entsprechend gemein haben, so kann man noch in einem Strahle des Bündels S zu einem Punkte A des einen Systems den homologen Punkt A_1 des andern nach Belieben annehmen. Wenn man nämlich jeden Strahl des Bündels S sich selbst entsprechend nennt, die Strahlenbündel A, A_1 aber als Scheine des ebenen Systems U betrachtet, so hat man auf zwei Strahlenbündel S, A des einen räumlichen Systems zwei Strahlenbündel S, A_1 des andern projektivisch so bezogen, dass jede gemeinschaftliche Ebene der beiden letztern Gebilde, man mag sie als ein Element des einen oder als ein Element des andern betrachten, einer und derselben gemeinschaftlichen Ebene der beiden erstern (und zwar sich selbst) entspricht.

Der Punkt S mag das (perspektivische) Projektionscentrum,

die Ebene U aber die (perspektivische) Spurebene der beiden Systeme genannt werden.

136. Wenn zwei räumliche Systeme Σ, Σ_1 zu einander perspektivisch sind, so ist jedes gerade Gebilde SAA_1R, welches aus dem Projektionscentrum S, einem Punkte A des Systems Σ, dem homologen Punkte A_1 des Systems Σ_1 und dem Punkt R besteht, in welchem die Gerade AA_1 die Spurebene U schneidet, jedem andern solchen Gebilde projektivisch. Sind nämlich SBB_1N, SCC_1R zwei andere solche Gebilde, so ist SBB_1N eine Projektion von SAA_1R aus dem Punkte, in welchem die einander entsprechenden Geraden AB, A_1B_1 die Spurebene schneiden, und eben so SCC_1R eine Projektion von SBB_1N, woraus der Satz folgt. Sind die Punkte A, A_1 durch die Punkte S, R nicht getrennt, so sind je zwei homologe gerade Gebilde, welche in einem Strahle des Bündels S liegen, und also auch je zwei homologe Ebenenbüschel, deren Axe in der Ebene U liegt, einstimmig-perspektivisch, daher alsdann die Systeme selbst einstimmig-perspektivisch heissen sollen. Sind aber die Punkte A, A_1 durch die Punkte S, R getrennt, so sind die System entgegengesetzt-perspektivisch.

Alles diess gilt auch, wenn Spurlinie für Spurebene, Strahlenbüschel für Ebenenbüschel gesetzt wird, von zwei in einerlei Ebene liegenden perspektivischen Systemen.

137. Da zu jedem Systeme Σ ein ihm reciprokes System angenommen werden kann, und dadurch das in §. 6 angedeutete Gesetz der Reciprocität bewiesen ist, so ist es in der Folge hinreichend, wenn von zwei reciproken Sätzen der eine oder der andere bewiesen wird. Je zwei unter sich collineären Gebilden G, G^1 in Σ entsprechen zwei unter sich collineäre Gebilde G_1, G^1_1 in Σ_1. Jedem Elemente in Σ, welches die beiden ersten Gebilde entsprechend gemein haben, entspricht ein Element in Σ_1, welches die beiden letztern Gebilde entsprechend gemein haben u. s. w.

138. Zwei collineäre Systeme, deren jedes sowohl eigentliche als auch unendlich ferne Elemente enthält, heissen affin (eigentlich verwandt), wenn jedem eigentlichen Elemente ein eigentliches Element und also jedem unendlich fernen Elemente ein unendlich

fernes Element entspricht. Zwei zu einander collineäre eigentliche ebene Systeme sind also affin, wenn der unendlich fernen Geraden der einen Ebene die unendlich ferne Gerade der andern, folglich jedem Parallelstrahlenbüschel ein Parallelstrahlenbüschel, jedem Parallelstreifen ein Parallelstreifen, jedem Parallelogramme ein Parallelogramm entspricht u. s. w. Zwei collineäre räumliche Systeme sind affin, wenn sie die unendlich ferne Ebene entsprechend gemein haben, folglich jedem eigentlichen ebenen Systeme ein demselben affines System, jedem Parallelraume ein Parallelraum, jedem Parallelepipedon ein Parallelepipedon entspricht u. s. w. Sind zwei perspektivische räumliche Systeme affin, so muss entweder ihr Projektionscentrum im Unendlichen liegen, oder ihre Spurebene die unendlich ferne Ebene oder beides zugleich der Fall seyn.

Will man zwei eigentliche ebene Systeme collineär so aufeinander beziehen, dass sie affin sind, so kann man zu drei nicht in einer und derselben Geraden liegenden eigentlichen Punkten A, B, C des einen Systems drei solche Punkte A_1, B_1, C_1 des andern nach Belieben annehmen. Den unendlich fernen Punkten der Geraden AB, AC müssen die unendlich fernen Punkte der Geraden A_1B_1, A_1C_1 ensprechen. Sollen zwei räumliche Systeme projektivisch so aufeinander bezogen werden, dass sie affin sind, so kann man zu vier nicht in einerlei Ebene liegenden eigentlichen Punkten des einen Systems vier solche Punkte des andern nach Belieben annehmen.

§. 11.

Von den Linien, Flächen und den ihnen verwandten Gebilden.

139. Nimmt man den Begriff Büschel im weitern Sinne, so kann man jede stetige Aufeinanderfolge von Geraden, welche in einerlei Ebene liegen, einen Strahlenbüschel und jede stetige Aufeinanderfolge von Ebenen einen Ebenenbüschel nennen. Es entspricht alsdann in zwei reciproken ebenen Systemen jeder Linie (stetigen Aufeinanderfolge von Punkten) ein Strahlenbüschel, in zwei reciproken räumlichen Systemen aber jeder Linie ein Ebenen-

büschel, jeder Kegelfläche ein Strahlenbüschel und überhaupt jeder stetigen Aufeinanderfolge von Geraden wieder eine stetige Aufeinanderfolge von Geraden. Das Reciproke von einer aus Strecken zusammengesetzten Linie ist ein aus Winkeln zusammengesetzter Büschel.

Lässt man in dem einen von zwei reciproken ebenen Systemen zwei Strahlen um zwei feste Punkte A, B sich drehen, so dass ihr Schnittpunkt irgend eine Linie s beschreibt, so beschreibt die diesem Punkte entsprechende Gerade des andern Systems, indem ihre Spuren in zwei festen Geraden A_1, B_1 sich bewegen, den Strahlenbüschel s_1, welcher der Linie s entspricht, und, wenn diese geschlossen ist, ebenfalls sich schliesst. Ist kein Stück der Linie s gerade, so ist auch kein Stück des Strahlenbüschels s_1 ein Winkel. Wenn überdiess keine n Punkte der Linie s in einer und derselben Geraden liegen, so gehen auch keine n Strahlen des Büschels s_1 durch einen und denselben Punkt.

Lässt man in dem einen von zwei reciproken räumlichen Systemen drei Ebenen um die Seiten a, b, c eines Dreiecks als feste Axen sich drehen, so dass ihr Schnittpunkt irgend eine Linie s beschreibt, so beschreibt die diesem Punkte entsprechende Ebene des andern Systems, indem ihre Spuren in drei festen Geraden a_1, b_1, c_1 sich bewegen, den der Linie s entsprechenden Ebenenbüschel s_1. Liegen keine n Punkte der Linie s in einerlei Ebene, so gehen auch keine n Ebenen des Büschels s_1 durch einen und denselben Punkt.

140. In zwei reciproken räumlichen Systemen entspricht jeder Fläche F, deren Elemente Punkte sind, ein Ebenenbündel F_1, welcher der Inbegriff von allen den Ebenen ist, deren jede einem Punkte jener Fläche entspricht. Hat die Fläche F mit keiner Geraden mehr als n Punkte gemein, so können auch durch keine Gerade mehr als n Ebenen des Bündels F_1 gehen. Betrachtet man die Fläche F als eine stetige Aufeinanderfolge von Linien, so erscheint der Ebenenbündel F_1 als eine stetige Aufeinanderfolge von Ebenenbüscheln.

Wenn man unter einer Regelfläche nur eine stetige Aufeinanderfolge von Geraden als Elementen versteht, so entspricht jeder Regelfläche R eine Regelfläche R_1. Betrachtet man aber Punkte

als Elemente der erstern Fläche, so entspricht derselben der Ebenenbündel R_1, dem jede Ebene angehört, welche durch eine Gerade der Regelfläche R_1 geht.

141. Jeder Punkt B in einer Curve s kann als der Endpunkt eines Stücks AB und als der Anfangspunkt eines Stückes BC betrachtet werden, so dass keines von diesen beiden Stücken der Curve von einer durch den Punkt B gehenden Ebene in mehr als zwei Punkten und, im Falle die Curve eben ist, von einer durch B gehenden Geraden in mehr als einem Punkte geschnitten wird. Projicirt man nun die Curve AB (das Stück AB der Curve s) aus dem Mittelpunkte B, so erhält man eine Winkelfläche (eine Kegelfläche oder einen ebenen Winkel), deren Anfangsschenkel die Gerade BA ist, während jeder in ihr liegende Strahl durch einen in der Curve AB befindlichen Punkt geht.

Von dem Endschenkel der Winkelfläche soll gesagt werden, dass er der Curve AB im Punkte B sich anschmiege oder aus dem Punkte B den mit diesem Punkte zusammenfallenden Punkt der Curve projicire. Wenn der Anfangsschenkel der Winkelfläche, welche aus dem Mittelpunkte B die Curve BC projicirt, von dem Endschenkel der erstern Winkelfläche verschieden ist, und es also zwei Gerade giebt, welche im Punkte B der Curve ABC sich anschmiegen, so bildet diese in jenem Punkte eine Ecke.

Eben so giebt es, wenn abc eine Kegelfläche ist, entweder eine oder zwei Ebenen, welche ihr im Strahle b sich anschmiegen, je nachdem nämlich der Endschenkel des Flächenwinkels, welcher aus der Axe b das Stück ab der Fläche projicirt, mit dem Anfangsschenkel des Flächenwinkels, welcher aus derselben Axe das Stück bc projicirt, zusammenfällt, oder von demselben verschieden ist.

Ist AB eine gewundene Curve, so versteht man unter der ihr im Punkte B sich anschmiegenden Ebene, den Endschenkel des Flächenwinkels, welcher die Curve aus der ihr im Punkte B sich anschmiegenden Geraden projicirt Fällt diese Ebene mit der Ebene, welche im Punkte B der Curve BC sich anschmiegt, nicht zusammen, so giebt es durch diesen Punkt zwei Ebenen, welche in ihm der Curve ABC sich anschmiegen. Von einer

ebenen Curve kann man sagen, dass ihr in allen Punkten die Ebene sich anschmiege, in der sie liegt.

142. Schmiegt der Curve AB im Punkt B die Gerade b sich an, so schmiegt der Fläche S (AB), welche aus dem Punkte S die Curve AB projicirt, in dem Strahle SB, der auch mit b zusammenfallen kann, die Ebene Sb sich an, welche aus der Axe SB den mit dem Punkte B zusammenfallenden Punkt der Curve AB projicirt. Wenn daher der Curve ABC im Punkte B zwei Gerade b, β sich anschmiegen, so bildet jede Kegelfläche, welche die Curve ABC aus einem ausserhalb der Ebene bβ befindlichen Punkte projicirt, eine durch den Punkt B gehende Kante. Dasselbe ist der Fall, wenn der Curve ABC im Punkte B nur eine Gerade aber zwei Ebenen sich anschmiegen und aus einem in jener Geraden befindlichen Punkte projicirt wird.

In der Folge wird, wenn von einer Curve die Rede ist, und nicht ausdrücklich das Gegentheil bemerkt wird, immer vorausgesetzt, dass der Curve in jedem Punkte, durch welchen sie nämlich nur einmal geht, nur eine Gerade und eine Ebene sich anschmiegen.

143. Die stetige Aufeinanderfolge von Geraden, welche einer und derselben Curve sich anschmiegen, soll die der Curve sich anschmiegende Regelfläche oder auch, wenn die Curve eben ist, der ihr sich anschmiegende Strahlenbüschel, die stetige Aufeinanderfolge von Ebenen aber, welche einer und derselben gewundenen Curve oder auch einer und derselben Kegelfläche sich anschmiegen, der ihr sich anschmiegende Ebenenbüschel genannt werden.

Wird eine gewundene Curve durch s bezeichnet, so ist unter der Regelfläche s die der Curve s sich anschmiegende Regelfläche und unter dem Ebenenbüschel s der der Regelfläche s (oder der Curve s) sich anschmiegende Ebenenbüschel zu verstehen. Drei zusammengehörige Elemente B der drei Gebilde s sind ein Punkt B der Curve s, die in diesem Punkte der Curve sich anschmiegende Gerade B und die in dieser Geraden der Regelfläche s (also im Punkte B der Curve s) sich anschmiegende Ebene B. Der Punkt B ist als der Mittelpunkt der Geraden B, diese Gerade aber als die Axe der Ebene B zu betrachten. Bewegen sich drei zusammengehörige Elemente P, so dass der Punkt P die Curve s,

also die Gerade P die Regelfläche s und die Ebene P den Ebenenbüschel s beschreibt, so bewegt sich der Punkt P in der Geraden P, während die Gerade P in der Ebene P um den Punkt P und die Ebene P um die Gerade P sich dreht.

Wenn s eine ebene Curve ist (alle Ebenen des Ebenenbüschels s in einander fallen), und der Punkt P die Curve s, also die Gerade P den Strahlenbüschel s beschreibt, so bewegt sich der Punkt P in der Geraden P, während diese Gerade in der festen Ebene s um jenen Punkt sich dreht. Wenn endlich die Regelfläche s eine Kegelfläche ist (alle Punkte der Curve s in einander fallen) und der Strahl P die Kegelfläche, folglich die Ebene P den derselben sich anschmiegenden Ebenenbüschel s beschreibt, so dreht sich die Gerade P um den festen Punkt s in der Ebene P, während diese Ebene um jene Gerade sich dreht.

144. Wenn AB (141) eine ebene Curve ist, der also ein Strahlenbüschel AB sich anschmiegt, so ist

der Strahl B der Endschenkel des Winkels, welcher die Curve AB aus dem Punkte B projicirt.	der Punkt B der Endpunkt der Strecke, in welcher der Strahlenbüschel AB von der Geraden B geschnitten wird.

145. In zwei reciproken ebenen Systemen entspricht jeder Curve ABC ein Strahlenbüschel $A_1 B_1 C_1$, welcher der Curve $A_1 B_1 C_1$ sich anschmiegt, die dem der erstern Curve sich anschmiegenden Strahlenbüschel ABC entspricht. Da nämlich die Strecke, in welcher der Büschel AB von der Geraden B geschnitten wird, im Punkte B sich endigt, so muss auch der jener Strecke entsprechende Winkel, welcher aus dem Punkte B_1 die Curve $A_1 B_1$ projicirt, in dem Strahle B_1 sich endigen, welcher dem Punkte B entspricht.

Das Reciproke von einer geschlossenen Curve s, welcher, weil sie eine Ecke bildet, ein nicht geschlossener Strahlenbüschel sich anschmiegt, ist ein geschlossener Strahlenbüschel s_1, welcher einer nicht geschlossenen Curve sich anschmiegt. Dem Eckpunkte der Curve s, in welchem also derselben zwei Strahlen sich anschmiegen, entspricht der Strahl, welcher der Curve s_1 in ihren beiden Grenzpunkten sich anschmiegt und also zwei Mittelpunkte hat. Das Reciproke von einer geschlossenen Curve, wel-

cher, weil sie drei Ecken bildet, drei unter sich nicht zusammenhängende Strahlenbüschel sich anschmiegen, ist ein Strahlenbüschel, welcher drei nicht mit einander zusammenhängenden Curven sich anschmiegt. Es folgt hieraus, dass jeder Strahlenbüschel, welcher keinen Winkel als Stück in sich enthält und folglich von einer krummen Linie das Reciproke ist, einer oder mehrern Curven sich anschmiegt. In der Regel wird aber, wenn von einem stetigen Gebilde, welches einem andern, oder welchem ein anderes Gebilde sich anschmiegt, die Rede ist, vorausgesetzt, dass auch in dem andern keine Unterbrechung der Stetigkeit statt finde.

Sind ein ebenes System und ein Strahlenbündel zu einander reciprok, so entspricht jeder Curve ein Ebenenbüschel, welcher der Kegelfläche sich anschmiegt, die dem jener Curve sich anschmiegenden Strahlenbüschel entspricht.

146. Jede Regelfläche, welche entweder eine Kegelfläche ist, oder einer gewundenen Curve sich anschmiegt, heisst abwickelbar.

Eine Curve und die ihr sich anschmiegende Regelfläche werden (142) aus jedem Punkte, welcher, im Falle die Curve eben ist, ausserhalb ihrer Ebene liegt, durch eine Kegelfläche und den derselben sich anschmiegenden Ebenenbüschel projicirt.

Eine abwickelbare Regelfläche s und der ihr sich anschmiegende Ebenenbüschel s werden von jeder Ebene U, welche, im Falle die Fläche eine Kegelfläche ist, nicht durch den Mittelpunkt derselben geht, in einer Curve und den derselben sich anschmiegenden Strahlenbüschel geschnitten.

Nimmt man nämlich an, dass zwei zusammengehörige Elemente P der Gebilde s und also auch ihre Spuren p in der Ebene U sich bewegen, so bewegt sich der Punkt p in der Geraden p, während diese Gerade um jenen Punkt sich dreht, woraus man schliessen kann, dass der Punkt p eine Curve und die Gerade p den derselben sich anschmiegenden Strahlenbüschel beschreibt. Ob hiebei der Punkt P fest ist oder ebenfalls sich bewegt, ist ganz gleichgültig und kann auch an der Bewegung der Elemente p nicht erkannt werden. Der Fall, in welchem die Regelfläche s einer Curve sich anschmiegt und die schneidende Ebene durch eine Gerade der Regelfläche geht, kann vorläufig noch ausser

Acht gelassen werden, indem dieser Fall bei dem Beweise des folgenden Satzes nicht vorausgesetzt wird, aus dem folgenden Satze aber hervorgeht, dass die obigen Sätze zu einander reciprok sind und also, wenn man zwei reciproke Systeme sich denkt, aus dem einen sogleich der andere folgt.

147. In zwei reciproken räumlichen Systemen Σ, Σ_1 entspricht jeder Curve ABC einen Ebenenbüschel $A_1B_1C_1$, welcher der Regelfläche $A_1B_1C_1$ sich anschmiegt, die der jener Curve sich anschmiegenden Regelfläche ABC entspricht. Wenn ferner ABC eine gewundene Curve ist, so schmiegt die Regelfläche $A_1B_1C_1$ der Curve $A_1B_1C_1$ sich an, welche dem der Regelfläche ABC sich anschmiegenden Ebenenbüschel entspricht.

Der Fall, in welchem ABC eine ebene Curve ist, ist schon in 145 betrachtet worden. Da nun, wenn ABC eine gewundene Curve ist, der Ebenenbüschel AB von jeder nicht durch die Gerade B gehenden Ebene in einem Strahlenbüschel geschnitten wird, dessen Endschenkel die Spur der Geraden B zum Mittelpunkt hat, so folgt, dass jeder Kegelfläche, welche die Curve A_1B_1 aus einem ausserhalb der Geraden B_1 befindlichen Punkte projicirt, in ihrem Endschenkel die Ebene sich anschmiegt, welche aus demselben Punkte die Gerade B_1 projicirt, und dass also diese Gerade die der Curve A_1B_1 im Punkte B_1 sich anschmiegende Gerade sey. Da ferner die Regelfläche AB aus jedem ausserhalb der Geraden B befindlichen Punkte durch einen Ebenenbüschel projicirt wird, dessen Endschenkel die Gerade, welche aus demselben Mittelpunkte den Punkt B projicirt, zur Axe hat, so folgt, dass jeder Curve, in welcher die Regelfläche A_1B_1 von einer nicht durch die Gerade B_1 gehenden Ebene geschnitten wird, in ihrem Endpunkte die Spur der Ebene B_1 sich anschmiegt, und dass also diese Ebene die der Regelfläche A_1B_1 in der Geraden B_1 sich anschmiegende Ebene ist. Will man den obigen Satz nicht auf 146 zurückführen, so darf man nur bemerken, dass, wenn drei zusammengehörige Elemente P der Gebilde ABC diese Gebilde beschreiben, auch die ihnen entsprechenden Elemente P_1 der Gebilde $A_1B_1C_1$ sich so bewegen, dass die Ebene P_1 um die Gerade P_1 und diese Gerade in jener Ebene um den Punkt P_1 sich dreht, während der Punkt P_1 in jener Geraden sich bewegt.

Das Reciproke von einem Ebenenbüschel, von welchem kein Stück einem und demselben Strahlenbündel angehört, ist eine Curve, von welcher kein Stück eben ist. Findet in den beiden der Curve sich anschmiegenden Gebilden keine Unterbrechung der Stetigkeit statt, so gilt diess auch von den beiden Gebilden, welchen der Ebenenbüschel sich anschmiegt.

148. Wenn AB eine gewundene Curve ist, der also eine Regelfläche AB und ein Ebenenbüschel AB sich anschmiegen, so ist

die Gerade B der Endschenkel der Kegelfläche, welche die Curve AB aus dem Punkte B projicirt, die Ebene B aber der Endschenkel des Flächenwinkels, welcher die Curve AB aus der Axe B projicirt, und zugleich der Endschenkel des Ebenenbüschels, welcher die Regelfläche AB aus dem Punkte B projicirt.

die Gerade B der Endschenkel des Strahlenbüschels, in welchem der Ebenenbüschel AB von der Ebene B geschnitten wird, der Punkt B aber der Endpunkt der Strecke, in welcher der Ebenenbüschel AB die Gerade B schneidet, und zugleich der Endpunkt der Curve, in welcher die Regelfläche AB und die Ebene B sich schneiden.

149. Von einer Geraden soll gesagt werden, dass sie einer Fläche in einem Punkte sich anschmiege, wenn sie in diesem Punkte irgend einer in der Fläche liegenden Linie sich anschmiegt. Liegt also eine Gerade in einer Fläche, so schmiegt sich die Gerade in allen ihren Punkten der Fläche an.

Von einer Ebene soll gesagt werden, dass sie einer Fläche F in einem Punkte sich anschmiege, wenn die Ebene entweder eine stetige Aufeinanderfolge von Geraden, die der Fläche in jenem Punkte sich anschmiegen, in sich enthält, oder einer von solchen Geraden erfüllten Kegelfläche sich anschmiegt. Wenn übrigens ein Ebenenbüschel so beschaffen ist, dass nach der so eben gegebenen Erklärung alle seine Ebenen mit Ausnahme seines Endschenkels der Fläche F sich anschmiegen, so ist auch diese Ebene als eine der Fläche F sich anschmiegende Ebene zu betrachten.

Schmiegt eine Ebene einer abwickelbaren Regelfläche sich an, so geschieht solches (146) in einer Geraden (in allen Punkten einer Geraden), daher einer abwickelbaren Regelfläche nur

ein Ebenenbüschel, einer andern krummen Fläche aber ein Ebenenbündel sich anschmiegt.

150. In zwei reciproken räumlichen Systemen entspricht jeder krummen Fläche F, von welcher kein Stück abwickelbar ist, ein Ebenenbündel F_1, welcher der Fläche F_1 sich anschmiegt, die dem der erstern Fläche sich anschmiegenden Ebenenbündel F entspricht.

Jede in der Fläche F_1 enthaltene Curve $A_1 B_1$ entspricht einem in dem Ebenenbündel F enthaltenen Ebenenbüschel A B. Gleichwie nun der Endschenkel der Regelfläche A B durch den Punkt geht, in welchen die Ebene B der Fläche F sich anschmiegt, so liegt auch der Endschenkel der Regelfläche $A_1 B_1$ in der jenem Punkte entsprechenden Ebene des Ebenenbündels F_1.

151. Wenn der Ebene U in dem einen von zwei collineären räumlichen Systemen Σ, Σ_1 die unendlich ferne Ebene des andern entspricht, so entspricht jeder Curve A B C, welche die Ebene U in einem Punkte B schneidet, eine Curve $A_1 B_1 C_1$, welche die unendlich ferne Ebene in einem Punkte B_1 schneidet, und jeder Kegelfläche, welche die erstere Curve aus einem ausserhalb der Ebene U befindlichen Punkte S projicirt, eine Kegelfläche, welche die letztere aus einem eigentlichen Punkte S_1 projicirt. Die beiden einfachen Kegelflächen, welche die Stüke $A_1 B_1$, $B_1 C_1$ der Curve $A_1 B_1 C_1$ aus der Spitze S projiciren, hängen aus dem Grunde nicht zusammen, weil der Anfangsschenkel der letztern vom Endschenkel der erstern die Ergänzung ist. Wenn aber die Curve A B C die Ebene U im Punkte B und also die Curve $A_1 B_1 C_1$ die unendlich ferne Ebene im Punkte B_1 berührt, so findet auch zwischen den erwähnten einfachen Kegelflächen, da der Endschenkel der erstern zugleich der Anfangsschenkel der letztern ist, Zusammenhang statt.

Jeder geschlossenen Curve, welche mit der Ebene U n Punkte gemein hat, entspricht eine geschlossene Curve, welche aus n Aesten besteht, deren jeder in einem unendlich fernen Punkte anfängt und in einem unendlichen fernen Punkte (dem Anfangspunkte des folgenden) sich endigt.

Jeder Fläche F, welche die Ebene U in einer Linie s

$\left\{\begin{matrix}\text{schneidet}\\ \text{berührt}\end{matrix}\right\}$, entspricht eine Fläche F_1, welche die unendlich ferne Ebene in einer Linie s_1 $\left\{\begin{matrix}\text{schneidet}\\ \text{berührt}\end{matrix}\right\}$. Berührt die Fläche F die Ebene U nur in einem Punkte, so berührt auch die Fläche F_1 die unendlich ferne Ebene nur in einem Punkte. Wenn endlich die Fläche F mit der Ebene U gar keinen Punkt gemein hat, so sind alle Punkte der Fläche F_1 eigentliche Punkte

152. Jede eigentliche Gerade, welche einer Curve in einem unendlich fernen Punkte sich anschmiegt, heisst eine Assymptote derselben. Projicirt man eine ins Unendliche gehende gewundene Curve AB nach der Richtung, in welcher ihr unendlich ferner Endpunkt B liegt, so erhält man eine Cylinderfläche A^1B, welcher in ihrem Endschenkel B (dem Endschenkel der Regelfläche AB) der Endschenkel B des Ebenenbüschels AB sich anschmiegt. Jede Ebene, welche jene Richtung nicht enthält, schneidet die Cylinderfläche in einer Curve a^1b, welcher in ihrem Endpunkte b die Spur b der Ebene B sich anschmiegt. Ist die Gerade B eine Assymptote der Curve AB, so ist auch der Punkt b ein eigentlicher Punkt. Ist die Gerade B eine unendlich ferne Gerade, aber doch die Ebene B eine eigentliche Ebene, so ist die Gerade b eine Assymptote der ins Unendliche gehenden Curve a^1b. Wenn endlich die Ebene B die unendlich ferne Ebene ist, so sind die Elemente B, b sämmtlich uneigentliche Elemente.

Ist eine Curve der Schnitt einer eigentlichen Kegelfläche mit einer eigentlichen Ebene E, so entspricht jedem Strahle der Kegelfläche, welcher zur Ebene E parallel ist, ein unendlich ferner Punkt der Curve, und jeder Ebene, welche zur Ebene E nicht parallel ist, aber der Kegelfläche in einem zu dieser Ebene parallelen Strahle sich anschmiegt, eine Assymptote der Curve.

---

§. 12.

Eintheilung der geschlossenen Linien, Flächen u. s. w. in solche von parer und in solche von unparer Ordnung.

153. Eine geschlossene Linie s heisst von parer oder unparer Ordnung, je nachdem sie von einer Ebene U, welche kein

Stück derselben in sich enthält, parmal oder unparmal geschnitten wird.

Es werde die Linie s von der Ebene U in m Punkten und von einer andern Ebene V, welche kein Stück derselben in sich enthält, in n Punkten geschnitten. Da nun die Linie s sich schliesst und in jedem Punkte, in welchem sie die eine oder die andere von den beiden Ebenen schneidet, von einem der beiden Flächenwinkel U V, U·V in den andern übergeht, so folgt, dass $m+n$ eine pare Zahl sey, und dass also die Linie entweder von jeder der beiden Ebenen parmal oder von jeder unparmal geschnitten werde.

Eine geschlossene ebene Linie ist hiernach von parer oder unparer Ordnung, je nachdem sie von einer Geraden (Linie erster Ordnung), welche kein Stück derselben in sich enthält, aber mit ihr in einerlei Ebene liegt, parmal oder unparmal geschnitten wird.

154. Wenn drei Linien AMB, ANB, ARB von denselben zwei Punkten begrenzt sind, so sind diejenigen Linien, deren jede aus zweien der drei erstern zusammengesetzt ist, entweder alle drei von parer Ordnung oder es ist die eine von parer Ordnung, während die beiden übrigen von unparer Ordnung sind.

Es schneide eine Ebene, welche weder durch A noch durch B geht, die Linie AMB in m Punkten, die Linie ANB in n Punkten und die Linie ARB in r Punkten, so wird von derselben Ebene die eine der oben erwähnten geschlossenen Linien in $m+n$, die andern in $m+r$ und die dritte in $n+r$ Punkten geschnitten. Da nun die Summe $2m+2n+2r$ dieser drei Zahlen eine pare Zahl ist, und also entweder alle drei pare Zahlen, oder die eine pare, die beiden übrigen aber unpare Zahlen sind, so folgt der Satz.

Substituirt man in einer Linie $\left\{\begin{matrix}\text{parer}\\\text{unparer}\end{matrix}\right\}$ Ordnung, welche aus Strecken zusammengesetzt ist, für irgend eine dieser Strecken deren Ergänzung, so erhält man eine Linie $\left\{\begin{matrix}\text{unparer}\\\text{parer}\end{matrix}\right\}$ Ordnung.

Anm. Wird von einem Gebilde gesagt, dass es von parer oder

unparer Ordnung ist, so versteht es sich von selbst, dass das Gebilde geschlossen ist.

155. Eine Fläche ist geschlossen, wenn sie von keiner Linie begrenzt ist. Das Reciproke von einer solchen Fläche ist ein geschlossener Ebenenbündel, welcher nämlich von keinem Ebenenbüschel begrenzt ist. Eine einfache Winkelfläche ist, wenn auch ihr Endschenkel mit ihrem Anfangsschenkel zusammenfällt, von einer unendlich fernen Linie begrenzt und also nicht als eine wirklich geschlossene Fläche, sondern nur als eine sich schliessende stetige Aufeinanderfolge von begrenzten Linien (Halbstrahlen) zu betrachten.

Wenn gesagt wird, dass zwei geschlossene Flächen F, G in einer Linie FG $\left\{\begin{matrix}\text{parer}\\\text{unparer}\end{matrix}\right\}$ Ordnung sich schneiden, so heisst diess nichts anderes, als dass die Anzahl der Linien unparer Ordnung, in welchen die Flächen sich schneiden, eine $\left\{\begin{matrix}\text{pare}\\\text{unpare}\end{matrix}\right\}$ Zahl sey. Man kann hier auch unter FG den Inbegriff aller Linien verstehen, welche die beiden Flächen mit einander gemein haben; nur ist alsdann jede Linie, in welcher sie sich berühren, doppelt zu zählen.

156. Eine geschlossene Fläche F heisst von parer oder unparer Ordnung, je nachdem eine Gerade a, von welcher kein Stück in der Fläche liegt, dieselbe parmal oder unparmal schneidet.

Es sey c eine andere Gerade, von welcher kein Stück in der Fläche F liegt. Man nehme ferner zwei Ebenen an, von welchen die eine G durch die Gerade a und die andere H durch die Gerade c geht, so dass aber die Fläche F weder von der Ebene G noch von der Ebene H noch von der Schnittlinie b der beiden Ebenen ein Stück in sich enthält. Wenn nun die Fläche F und die Ebene G in einer Linie parer Ordnung sich schneiden, so wird diese Linie und also auch die Fläche F von jeder der Geraden a, b parmal geschnitten. Ist aber die Linie FG von unparer Ordnung, so wird die Fläche F von jeder der Geraden a, b unparmal geschnitten. Eben so wird die Fläche F von der Geraden c parmal oder unparmal geschnitten, je nachdem sie von

der Geraden b und also auch von der Geraden a parmal oder unparmal geschnitten wird.

Eine Fläche $\left\{\begin{matrix}\text{parer}\\\text{unparer}\end{matrix}\right\}$ Ordnung wird hiernach von jeder Ebene (Fläche erster Ordnung), welche kein Stück derselben in sich enthält, in einer Linie $\left\{\begin{matrix}\text{parer}\\\text{unparer}\end{matrix}\right\}$ Ordnung geschnitten.

Wird eine Winkelfläche von einer nicht durch ihren Mittelpunkt gehenden Geraden in n Punkten geschnitten, so wird sie von der Ebene, welche diese Gerade aus jenem Punkte projicirt, in n Strahlen geschnitten, woraus hervorgeht, dass die obige Erklärung mit 20 und also auch mit 17 in Uebereinstimmung ist. Der Mittelpunkt einer geschlossenen Winkelfläche parer Ordnung ist, wenn Punkte als Elemente der Fläche betrachtet werden, ein Punkt, in welchem sie sich selbst berührt, welcher also, wenn in ihm die Fläche von einer Geraden geschnitten wird, zweimal zu zählen ist.

157. Zwei geschlossene Linien, welche in einerlei Ebene liegen, schneiden sich parmal, wenn entweder beide von parer Ordnung sind, oder die eine von parer und die andere von unparer Ordnung ist; — unparmal aber, wenn beide von unparer Ordnung sind. Folgt aus 17, wenn man das ebene System als einen Schnitt eines gewöhnlichen Strahlenbündels betrachtet.

158. Eine geschlossene Fläche F und eine ausserhalb derselben befindliche geschlossene Linie s schneiden sich unparmal, wenn beide von unparer Ordnung sind, in jedem andern Falle aber parmal.

Es sey s t eine stetige Aufeinanderfolge von geschlossenen Linien, deren jede ausserhalb der Fläche F liegt, so wird diese Fläche entweder von jeder der Linien parmal oder von jeder unparmal geschnitten, indem die Anzahl der Schnittpunkte beim stetigen Uebergange von einer Linie zu einer andern nur um eine pare Zahl sich vermehren oder vermindern kann. Aus demselben Grunde sind die Linien entweder alle von parer oder alle von unparer Ordnung. Da man nun annehmen kann, dass die Linie t in einer Ebene G liege, welche von der Fläche F kein Stück

enthält (etwa eine Projektion der Linie s auf die Ebene G sey), so folgt der Satz aus 156 und 157.

Durch die Betrachtung einer stetigen Aufeinanderfolge von Linien kann man auch, wenn ein Stück der Linie s in der Fläche F liegt, leicht entscheiden, ob dasselbe die Stelle eines Schnitt- oder eines Berührungspunktes vertritt.

159. Zwei geschlossene Flächen F, G, welche kein Stück mit einander gemein haben, schneiden sich, wenn beide von unparer Ordnung sind, in einer Linie unparer Ordnung, in jedem andern Falle aber in einer Linie parer Ordnung. Die Anzahl aller Punkte, in welcher drei geschlossene Flächen F, G, H, von welchen keine zwei ein Stück mit einander gemein haben, und welche auch nicht alle drei durch eine und dieselbe Linie gehen, sich schneiden, ist, wenn alle drei Flächen von unparer Ordnung sind, eine unpare, in jedem andern Falle aber eine pare Zahl.

Da in jedem der im letztern Satze erwähnten Punkte jede der drei Flächen von der Schnittlinie der beiden übrigen geschnitten wird, so folgt der letztere Satz aus dem erstern und aus 158. Um aber den erstern zu beweisen, darf man nur annehmen, dass H eine Ebene sey, und bemerken, dass nach 158 die Anzahl der Punkte, in welchen die Fläche F von der Linie GH und also auch die Ebene H von der Linie FG geschnitten wird, nur dann eine unpare Zahl ist, wenn jedes von den beiden Gebilden F, GH und also auch die Fläche G von unparer Ordnung ist.

160. Wenn zwei geschlossene Gebilde G, G_1 zu einander projektivisch sind, so sind entweder beide von parer oder beide von unparer Ordnung.

Sind nämlich G, G_1 zwei Linien oder eine Linie und eine Winkelfläche oder zwei Flächen, so folgt der Satz aus 153 und 156. Ist das eine von den beiden Gebilden G, G_1 eine Linie und das andere ein Büschel oder das eine eine Fläche und das andere ein Ebenenbündel, so ist der Satz als eine Erklärung zu betrachten. In den übrigen Fällen folgt alsdann der Satz aus 103.

Wird eine Gerade um einen festen Punkt in einer festen Ebene oder eine Ebene um eine feste Axe in unverändertem Sinne gedreht, bis sie wieder ihre anfängliche Stelle einnimmt, so be-

schreibt dieselbe einen Büschel erster Ordnung. Ein Ebenenbündel erster Ordnung ist der Inbegriff von allen Ebenen, welche durch einen und denselben Punkt gehen.

Substituirt man in einem Büschel $\left\{\begin{matrix}\text{parer}\\\text{unparer}\end{matrix}\right\}$ Ordnung, welcher aus Winkeln zusammengesetzt ist, für einen dieser Winkel seinen Nebenwinkel, so erhält man (154) einen Büschel $\left\{\begin{matrix}\text{unparer}\\\text{parer}\end{matrix}\right\}$ Ordnung.

161. Betrachtet man nur Gebilde, welche in einerlei Ebene liegen, so ist in der Regel die Anzahl der Punkte, welche eine Linie s $\left\{\begin{matrix}\text{parer}\\\text{unparer}\end{matrix}\right\}$ Ordnung mit einer Geraden gemein hat, eine $\left\{\begin{matrix}\text{pare}\\\text{unpare}\end{matrix}\right\}$ Zahl. Die Geraden, welche in Hinsicht auf die Linie s von der Regel eine Ausnahme machen, gehören einem Strahlenbüschel an, welcher mit keinem Strahlenbüschel erster Ordnung, dessen Mittelpunkt M ausserhalb der Linie s liegt, ein Stück gemein hat.

162. Die Anzahl der Punkte, welche eine Fläche U $\left\{\begin{matrix}\text{parer}\\\text{unparer}\end{matrix}\right\}$ Ordnung mit einer Geraden gemein hat, ist in der Regel eine $\left\{\begin{matrix}\text{pare}\\\text{unpare}\end{matrix}\right\}$ Zahl, so dass die Geraden, welche in Hinsicht auf die Fläche U von der Regel eine Ausnahme machen, und durch einen und denselben ausserhalb der Fläche befindlichen Strahlen, welche ein Strahlenbüschel s $\left\{\begin{matrix}\text{parer}\\\text{unparer}\end{matrix}\right\}$ Ordnung mit einem Strahlenbüschel erster Ordnung gemein hat, eine $\left\{\begin{matrix}\text{pare}\\\text{unpare}\end{matrix}\right\}$ Zahl. Die Mittelpunkte der Büschel erster Ordnung, welche in Hinsicht auf den Büschel s von der Regel eine Ausnahme machen, liegen in einer Linie, welche mit keiner ausserhalb des Büschels s befindlichen Geraden ein Stück gemein hat.

Die Anzahl der Ebenen, welche ein Ebenenbündel U $\left\{\begin{matrix}\text{parer}\\\text{unparer}\end{matrix}\right\}$ Ordnung mit einem Ebenenbüschel erster Ordnung gemein hat, ist in der Regel eine $\left\{\begin{matrix}\text{pare}\\\text{unpare}\end{matrix}\right\}$ Zahl, so dass die Axen aller Ebenenbüschel erster Ordnung, welche in Hinsicht auf den Ebenenbündel U von der Regel eine Ausnahme machen, und eine aus-

Punkt gehen, einer oder einigen Winkelflächen angehören und also keinen Winkelraum erfüllen.

serhalb desselben befindliche Ebene mit einander gemein haben, einem oder einigen Strahlenbüscheln angehören.

163. Zu jeder Regelfläche R $\left\{\begin{matrix}\text{parer}\\\text{unparer}\end{matrix}\right\}$ Ordnung gehört ein Ebenenbündel R $\left\{\begin{matrix}\text{parer}\\\text{unparer}\end{matrix}\right\}$ Ordnung, welcher nämlich der Inbegriff von allen Ebenen ist, deren jede durch eine Gerade der Regelfläche geht.

Es sey a eine Gerade, so dass weder die Regelfläche R und die Gerade a noch der Ebenenbündel R und der Ebenenbüschel a von den im Vorigen erwähnten Regeln eine Ausnahme machen. Bemerkt man nun, dass zu jedem Punkte, welchen die Fläche R mit der Geraden a gemein hat, weil in ihm diese Gerade von einer Geraden r der Fläche geschnitten wird, eine Ebene a r gehört, welche der Ebenenbündel R mit dem Ebenenbüschel a gemein hat, so folgt der Satz.

164. Wenn in einem einförmigen Grundgebilde ein Element P sich bewegt hat und während der Bewegung mit dem festen Elemente B zusammengefallen ist, ohne hiebei den Sinn der Bewegung geändert zu haben, so soll gesagt werden, dass das Element P über das Element B sich hinwegbewegt habe.

Beschreibt in einem einförmigen Grundgebilde u ein Element P ein Gebilde $\left\{\begin{matrix}\text{parer}\\\text{unparer}\end{matrix}\right\}$ Ordnung, so bewegt es sich, von welchem festen Elemente die Bewegung ausgehen mag, über jedes andere feste Element des einförmigen Grundgebildes $\left\{\begin{matrix}\text{parmal}\\\text{unparmal}\end{matrix}\right\}$ hinweg.

Da hier statt eines Büschels sein Schnitt mit einer Geraden betrachtet werden kann, so kann man annehmen, dass u eine Gerade sey. Beschreibt aber in einer Geraden ein Punkt P von A ausgehend eine geschlossene Linie, welche eine nicht durch A gehende Ebene n mal schneidet, so muss er über die Spur der Ebene n mal sich hinwegbewegen, woraus der Satz folgt. Wenn z. B. ein Punkt zuerst die Strecke A B C und alsdann die Strecke

CBA beschreibt, so hat er eine Linie parer Ordnung beschrieben. Substituirt man für ein Stück AB dieser Linie dessen Ergänzung A·B, so erhält man eine Linie unparer Ordnung.

Anm. Wenn nicht ausdrücklich bemerkt wird oder aus dem Zusammenhange hervorgeht, dass ein Gebilde eine stetige Aufeinanderfolge von Elementen enthalte oder enthalten könne, deren jedes öfter als einmal zu zählen ist, so wird, wie bisher, so auch in der Folge angenommen, dass dem nicht so sey.

165. Eine Linie s $\left\{\begin{matrix}\text{parer}\\\text{unparer}\end{matrix}\right\}$ Ordnung wird aus jedem ausserhalb derselben befindlichen Punkte S durch eine Winkelfläche S $\left\{\begin{matrix}\text{parer}\\\text{unparer}\end{matrix}\right\}$ Ordnung projicirt.

Ein Ebenenbüschel $\left\{\begin{matrix}\text{parer}\\\text{unparer}\end{matrix}\right\}$ Ordnung wird von jeder ihm nicht zugehörigen Ebene in einem Strahlenbüschel $\left\{\begin{matrix}\text{parer}\\\text{unparer}\end{matrix}\right\}$ Ordnung geschnitten.

Schneidet nämlich die Linie s eine durch den Punkt S gehende Ebene n mal, so wird diese Ebene auch von der Winkelfläche S n mal geschnitten. In der Geometrie der Ebene steht dem Satze linker Hand folgender gegenüber:

Die Spur eines Strahlenbüschels $\left\{\begin{matrix}\text{parer}\\\text{unparer}\end{matrix}\right\}$ Ordnung in einer Geraden u, welche ihm nicht angehört, ist eine Linie $\left\{\begin{matrix}\text{parer}\\\text{unparer}\end{matrix}\right\}$ Ordnung, so dass also, wenn ein Strahl den Büschel beschreibt, seine Spur in der Geraden u über jeden festen Punkt derselben $\left\{\begin{matrix}\text{parmal}\\\text{unparmal}\end{matrix}\right\}$ hinweggeht.

166. Eine Linie s $\left\{\begin{matrix}\text{parer}\\\text{unparer}\end{matrix}\right\}$ Ordnung wird aus jeder Axe a, welche weder mit der Linie einen Punkt gemein hat, noch mit ihr in einerlei Ebene liegt, durch einen Ebenenbüschel $\left\{\begin{matrix}\text{parer}\\\text{unparer}\end{matrix}\right\}$ Ordnung projicirt.

Ein Ebenenbüschel $\left\{\begin{matrix}\text{parer}\\\text{unparer}\end{matrix}\right\}$ Ordnung wird von jeder Geraden, welche weder in einer seiner Ebenen liegt, noch von allen in einem und demselben Punkte geschnitten wird, in einer Linie $\left\{\begin{matrix}\text{parer}\\\text{unparer}\end{matrix}\right\}$ Ordnung geschnitten.

Schneidet nämlich eine durch a gehende Ebene E die Linie s in n Punkten, so muss auch, wenn ein Punkt P von einem ausserhalb der Ebene E befindlichen Punkte ausgehend die Linie s beschreibt, die Ebene aP n mal über die Ebene E sich hinwegbewegen. Aus dem Satze rechter Hand folgt noch:

Wenn eine Ebene einen geschlossenen Ebenenbüschel beschreibt, welchem die unendlich ferne Ebene nicht angehört, so wendet sie am Ende jedem eigentlichen Punkte, der nun nicht in ihr liegt, dieselbe Seite zu, welche sie ihm Anfangs zugewendet hat, oder die entgegengesetzte Seite, je nachdem der Büschel von parer oder unparer Ordnung ist.

167. Eine Regelfläche R $\left\{\begin{matrix}\text{parer}\\\text{unparer}\end{matrix}\right\}$ Ordnung wird aus jedem nicht in ihr liegenden Punkte S durch einen Ebenenbüschel $\left\{\begin{matrix}\text{parer}\\\text{unparer}\end{matrix}\right\}$ Ordnung projicirt, welcher nämlich, wenn eine Gerade p die Regelfläche beschreibt, von der Ebene Sp beschrieben wird.

Es entspreche dem Ebenenbündel R in dem einen von den zwei reciproken Systemen die Regelfläche R_1 im andern und dem Punkte S im erstern die Ebene S_1 im letztern. Da nun die Regelflächen R, R_1 nach 160 und 163 entweder beide von parer oder beide von unparer Ordnung sind, und dasselbe von dem im Satze erwähnten Ebenenbüschel und der ihm entsprechenden Linie gilt, in welcher die Fläche R_1 von der Ebene S_1 geschnitten wird, so folgt der Satz aus 156.

168. Wird eine Regelfläche $\left\{\begin{matrix}\text{parer}\\\text{unparer}\end{matrix}\right\}$ Ordnung, der keine unendlich ferne Gerade angehört, von einer Geraden beschrieben, so nimmt diese zuletzt $\left\{\begin{matrix}\text{ohne}\\\text{mit}\end{matrix}\right\}$ Verwechslung der beiden in ihr enthaltenen Richtungen die anfängliche Stelle wieder ein.

Da nämlich hier nur die Linie c in Betrachtung kommt, in welcher die endlich ferne Ebene von der Regelfläche geschnitten wird, so kann man für diese Fläche, wenn sie keine Winkelfläche ist, eine Winkelfläche substituiren, welche jene Linie c aus irgend einem eigentlichen Punkte projicirt. 15.

§. 13.

Von den ebenen Figuren und den ihnen verwandten Gebilden.

169. Jedes Stück einer Ebene, welches als der Schnitt eines Strahlenkegels betrachtet werden kann, soll eine ebene Figur heissen. Gleichwie nun in einem Strahlenkegel keine Winkelfläche unparer Ordnung, so ist auch in einer ebenen Figur keine Linie unparer Ordnung enthalten.

Ist von einem gewöhnlichen Strahlenbündel ein eigentliches ebenes System ein Schnitt, so entspricht jedem Strahlenkegel, dessen Mantel von der zum ebenen Systeme parallelen Ebene des Strahlenbündels weder berührt noch geschnitten wird, eine eigentliche (endliche) Figur. Wird der Mantel eines Strahlenkegels von jener Ebene in einem Strahle berührt, so geht die ihm entsprechende Figur ins Unendliche. Wird ein Strahlenkegel durch jene Ebene (einen in ihr befindlichen Winkel) in zwei Theile getheilt, so wird die ihm entsprechende Figur durch die in ihr befindliche unendlich ferne Strecke in zwei Theile getheilt, welche, weil ihr Zusammenhang im Unendlichen liegt, nach der gewöhnlichen Ansicht nicht zusamenhängen.

Jede ebene Figur, deren Umfang mit irgend einer Geraden a, welche in der nämlichen Ebene liegt, keinen Punkt gemein hat, kann, wenn sie auch keine eigentliche Figur ist, doch als die Projektion einer eigentlichen Figur betrachtet werden. Projicirt man nämlich die Figur aus irgend einem ausserhalb ihrer Ebene befindlichen eigentlichen Punkte M, so erhält man einen Strahlenkegel, welcher von jeder zur Ebene Ma parallelen Ebene in einer eigentlichen Figur geschnitten wird.

170. Eine Ebene wird (16) als System von Punkten durch jede in ihr befindliche Linie f parer Ordnung, welche durch keinen Punkt öfter als einmal geht, in zwei Systeme getheilt, von welchen das eine eine von der Linie f eingeschlossene Figur ist (keine Linie unparer

Durch jeden Strahlenbüschel f_1 parer Ordnung, in welchem kein Strahl öfter als einmal zu zählen ist, wird das System von allen mit ihm in einerlei Ebene befindlichen Geraden in zwei Systeme getheilt, von welchen das eine, welches von dem Büschel f_1 ausgeschlossen heissen soll, kei-

Ordnung in sich enthält), während im andern unendlich viele Linien unparer Ordnung enthalten sind. Jede Linie, welche in der Ebene liegt und einen Punkt des einen Systems mit einem Punkte des andern verbindet, hat mit der gemeinschaftlichen Grenze f der beiden Systeme, durch welche die Punkte von einander getrennt sind, wenigstens einen Punkt gemein.

nen Strahlenbüschel unparer Ordnung in sich enthält, während im andern unendlich viele solche Büschel enthalten sind. Jeder Strahlenbüschel, welcher eine Gerade des einen Systems mit einer Geraden des andern verbindet, hat mit der gemeinschaftlichen Grenze f_1 der beiden Systeme, durch welche die Geraden von einander getrennt sind, wenigstens einen Strahl gemein.

Von je zwei begrenzten Systemen, welche einerlei Grenze haben, soll jedes die Ergänzung des andern genannt werden. Sind ein ebenes System und ein Strahlenbündel zu einander reciprok, so entspricht in ihnen jeder Figur (jedem von einer Linie eingeschlossenen Systeme von Punkten) ein von einem Ebenenbüschel ausgeschlossenes System von Ebenen und jedem von einem Strahlenbüschel ausgeschlossenen Systeme von Geraden ein von einer Winkelfläche eingeschlossenes System von Strahlen. Die Ergänzungen von entsprechenden Systemen entsprechen einander ebenfalls.

171. Jede Linie f, durch welche eine Ebene als System von Punkten in zwei Systeme F, F^1 getheilt wird, die in jedem Stücke der Linie aneinander stossen, ist von parer Ordnung.

Jeder Strahlenbüschel, durch welchen das System von allen in einerlei Ebene liegenden Geraden, in zwei Systeme getheilt wird, die den Büschel zur gemeinschaftlichen Grenze haben, ist von parer Ordnung.

Die Linie f wird nämlich von jeder in der nämlichen Ebene befindlichen Geraden, da diese eben so oft von F in F^1 als von F^1 in F übergeht, parmal geschnitten.

172. Versteht man unter einem ebenen n Ecke eine ebene Figur, welche von n Strecken eingeschlossen ist, so giebt es sechs Arten von Dreiecken. Die drei Seiten eines Dreiecks können nämlich seyn:

1) Drei endliche Strecken, was beim endlichen Dreiecke der Fall ist.
2) Eine endliche Strecke und zwei (einstimmig-parallele) Halbstrahlen.
3) Zwei Halbstrahlen und eine im Unendlichen liegende Strecke,
4) Zwei (entgegengesetzt-parallele) Halbstrahlen und eine durch das Unendliche gehende Strecke.
5) Eine endliche und zwei durch das Unendliche gehende Strecken.
6) Drei im Unendlichen liegende Strecken, so dass also das Dreieck der Schnitt einer dreiseitigen Strahlenpyramide mit der unendlich fernen Ebene ist.

Durch die in ihm liegende unendlich ferne Strecke wird ein Dreieck der vierten Art in zwei Dreiecke der dritten Art, ein Dreieck der fünften Art aber in ein Dreieck und ein Viereck getheilt.

Eben so giebt es, wenn man unter einem n Kante eine (eigentliche) n seitige Strahlenpyramide oder ein n seitiges Strahlenprisma versteht, sechs Arten von Dreikanten, nämlich das gewöhnliche Dreikant, welches einen eigentlichen Mittelpunkt hat, und fünf Arten von dreiseitigen Strahlenprismen, welchen den fünf ersten Arten von Dreiecken entsprechen, wenn ein ebenes System als ein Schnitt eines Parallelstrahlenbündels betrachtet wird. Jedem Dreiecke der ersten Art entspricht ein eigentliches dreiseitiges Strahlenprisma. Jedem Dreiecke der dritten Art (hohlen ebenen Winkel) entspricht ein dreiseitiges Strahlenprisma der dritten Art (ein hohler Flächenwinkel).

173. Eine Ebene wird durch drei Gerade, welche nicht in einem und demselben Punkte sich schneiden, in vier Dreiecke getheilt, von welchen je zwei eine Seite und den ihr gegenüberliegenden Winkel mit einander gemein haben. Je zwei von den drei Geraden bilden nämlich mit einander zwei Winkel, deren jeder durch seinen Schnitt mit der dritten Geraden in zwei Dreiecke getheilt wird. Liegen zwei Punkte in einem und demselben von den vier Dreiecken, so wird von den beiden Strecken, welche sie verbinden, die eine von keiner der drei Geraden und also die andere von jeder derselben geschnitten.

Schneiden sich die drei Geraden in drei eigentlichen Punkten, so ist das eine von den vier Dreiecken ein endliches Dreieck, während die drei übrigen von der fünften Art sind. Sind zwei von den drei Geraden zu einander parallel, so sind zwei von den vier Dreiecken von der zweiten, die beiden übrigen aber von der vierten Art. Schneiden sich nur zwei von den drei Geraden in einem eigentlichen Punkte, so dass also die dritte Gerade die unendlich ferne Gerade der Ebene ist, so sind alle vier Dreiecke von der dritten Art. Ist die Ebene selbst die unendlich ferne Ebene, so sind alle vier Dreiecke von der sechsten Art.

174. Wenn die drei Eckpunkte eines Dreiecks und ein Punkt P, welcher in ihm liegt, oder eine Gerade p, welche mit seinem Umfange keinen Punkt gemein hat, aber mit ihm in einerlei Ebene liegt, gegeben sind, so ist das Dreieck bestimmt. Jede Strecke, welche zwei von den drei gegebenen Eckpunkten verbindet, und von der Geraden, die aus dem dritten Eckpunkte den Punkt P projicirt, geschnitten, oder von der Geraden p nicht geschnitten wird, ist eine Seite des Dreiecks.

Hat man irgend eines von den vier Dreiecken, welche die drei Punkte A, B, C zu Eckpunkten haben, durch ABC bezeichnet, so kann man die drei übrigen, von welchen das eine die Seite AB, das andere die Seite AC und das dritte die Seite BC mit dem erstern gemein hat, durch AB·C, AC·B, BC·A bezeichnen, so dass also von diesen drei letztern Dreiecken das erste und zweite die Seite B·C (oder C·B), das erste und dritte die Seite A·C und das zweite und dritte die Seite A·B gemein haben.

175. Zwei nicht concentrische Winkel ab, ac, welche in einerlei Ebene liegen und einen Schenkel gemein haben, durchschneiden sich in einem Dreiecke, dem jeder Punkt angehört, in welchem ein Strahl des einen Winkels von einem Strahle des andern geschnitten wird. Werden jene Winkel durch p, q und ihre Nebenwinkel durch p_1, q_1 bezeichnet, so kann man die vier Dreiecke, welche die Geraden a, b, c mit einander bilden, durch pq, pq_1, p_1q, p_1q_1 bezeichnen.

176. Wird in einem gewöhnlichen Strahlenbündel, von welchem ein ebenes System ein Schnitt ist, ein Vierkant angenom-

men, so entspricht diesem nur dann ein endliches Viereck, wenn die schneidende Ebene eine eigentliche Ebene ist, und die zu ihr parallele Ebene des Strahlenbündels den Mantel des Vierkants weder berührt noch schneidet. Da aber diese Ebene den Mantel des Vierkants in einer Kante oder in einer Seite berühren oder das Vierkant in zwei Dreikante oder in ein Dreikant und ein Vierkant oder in ein Dreikant und ein Fünfkant oder in zwei Vierkante theilen oder die schneidende Ebene die unendlich ferne Ebene seyn kann, so giebt es acht Arten von ebenen Vierecken, vorausgesetzt, dass nur Vierecke mit ausspringenden Winkeln betrachtet werden. Allgemein ist die Anzahl der verschiedenen Arten von ebenen n Ecken, welche lauter ausspringende Winkel haben entweder $\frac{3n+3}{2}$ oder $\frac{3n+4}{2}$, je nachdem nämlich n eine unpare oder pare Zahl ist.

177. Vier Gerade a, b, c, d, welche durch einen und denselben Punkt gehen, von welchen aber keine drei in einerlei Ebene liegen, sind die Kanten von drei Vierkanten abcd, acdb, adbc, deren jedes lauter ausspringende Winkel hat, und von welchen je zwei in zwei einander gegenüberliegenden Seiten an einanderstossen. Man erhält die sechs Seiten dieser drei Vierkante, wenn man je zwei von den vier Geraden durch einen ebenen Winkel verbindet, welcher von der durch die beiden übrigen Geraden bestimmten Ebene nicht geschnitten wird. Eben so sind vier Punkte, welche in einerlei Ebene, von welchen aber keine drei in einer und derselben Geraden liegen, die Eckpunkte von drei Vierecken, deren jedes lauter ausspringende Winkel hat, und welche zusammen die ganze Ebene erfüllen.

178. Wenn die Grenze eines Strahlenkegels von keiner Ebene in mehr als zwei Strahlen geschnitten wird, so ist jeder Strahl a seiner Ergänzung die Axe eines um ihn beschriebenen Flächenwinkels. Man kann nämlich eine Ebene, welche durch die Gerade a geht und den Mantel des Strahlenkegels schneidet, in jedem Sinne um jene Gerade sich drehen lassen, bis die Schnittlinien in einander fallen. Geschieht diess bei der Drehung in dem einen Sinne in dem Strahle b und bei der Drehung im andern Sinne in dem Strahle c, so sind ab, ac die Schenkel des er-

wähnten Flächenwinkels. — Würden die drei Geraden a, b, c in einerlei Ebene liegen, so würde diese um jede vierte Gerade, welche durch die beiden letztern von der erstern getrennt, so gedreht werden können, dass sie den Mantel des Strahlenkegels in vier Strahlen schneiden müsste.

Wird der Umfang einer ebenen Figur von keiner Geraden in mehr als zwei Punkten geschnitten, so ist jeder Punkt ihrer Ergänzung der Mittelpunkt eines um sie beschriebenen ebenen Winkels, daher die Figur (169), wenn sie auch keine eigentliche Figur ist, doch als die Projektion einer eigentlichen Figur betrachtet werden kann.

179. Wenn der Umfang f einer ebenen Figur F von keiner Geraden in mehr als zwei Punkten geschnitten wird, so soll die stetige Aufeinanderfolge g von Geraden, welche die Linie f berühren, der diese Linie oder auch der die Figur F umhüllende Strahlenbüschel genannt werden. Durch den Strahlenbüschel g wird das System von allen in der Ebene befindlichen Geraden in zwei Systeme getheilt, von welchen das eine G von dem Büschel, so wie auch von der Linie f ausgeschlossen ist, das andere G^1 aber unendlich viele Strahlenbüschel erster Ordnung in sich enthält. Eine Gerade, welche nicht in der gemeinschaftlichen Grenze dieser beiden Systeme liegt, gehört dem erstern oder dem letztern an, je nachdem sie die Linie f nicht schneidet oder schneidet. Ist F eine geradlinige Figur, so ist der Büschel g aus den Aussenwinkeln derselben zusammengesetzt. Bildet aber die Linie f keine Ecke, so ist g der ihr sich anschmiegende Strahlenbüschel.

Eine Gerade hat mit der Linie f entweder zwei Punkte A, B oder gar keinen Punkt oder eine Strecke oder einen Punkt gemein, je nachdem sie nämlich in dem Systeme G^1 oder in dem Systeme G enthalten ist, oder die Linie f in einer Strecke oder in einem Punkte berührt. Im ersten Falle wird die Gerade

Ein Strahlenbüschel erster Ordnung hat mit dem Büschel g entweder zwei Strahlen a, b oder gar keinen Strahl oder einen Winkel oder einen Strahl gemein, je nachdem nämlich sein Mittelpunkt in dem Systeme F^1 oder in dem Systeme F enthalten oder ein Eckpunkt der Linie f oder ein anderer

durch die beiden Punkte A, B in zwei Strecken getheilt, von welchen die eine in die Figur F beschrieben, die andere aber in der Ergänzung F^1 dieser Figur enthalten ist. In den übrigen Fällen liegt kein Punkt der Geraden in der Figur F.

Punkt derselben ist. Im ersten Falle wird der Strahlenbüschel erster Ordnung durch die beiden Strahlen a, b in zwei Winkel getheilt, von welchen der eine dem Systeme G angehört, der andere aber um die Figur F beschrieben ist. In den übrigen Fällen liegt kein Strahl des Strahlenbüschels in dem Systeme G.

180. In zwei reciproken ebenen Systemen Σ, Σ_1 entspricht jeder Figur F, deren Umfang f von keiner Geraden in mehr als zwei Punkten geschnitten wird, ein vom Umfange einer solchen Figur ausgeschlossenes System F_1 von Geraden. Gleichwie nämlich der die Linie f umhüllende Strahlenbüschel g mit einem Strahlenbüschel erster Ordnung, dessen Mittelpunkt in der Linie f liegt, entweder nur einen Strahl oder einen Winkel, mit einem andern Strahlenbüschel erster Ordnung aber entweder gar keinen Strahl oder zwei Strahlen gemein hat, so hat die Linie g_1 mit einer Geraden, welche dem Büschel f_1 angehört, entweder nur einen Punkt oder eine Strecke, mit einer andern Geraden aber entweder gar keinen Punkt oder zwei Punkte gemein. Jeder Winkel, welcher um die von der Linie g_1 eingeschlossene Figur G_1 beschrieben ist, entspricht einer Strecke, welche von einer in die Figur F beschriebenen Strecke die Ergänzung ist, u. s. w.

Wenn die Linie f aus m Strecken und n Curven zusammengesetzt ist und r Ecken bildet, so muss die Linie g_1 aus r Strecken und n Curven zusammengesetzt seyn und m Ecken bilden. Ist F ein nEck, so ist auch G_1 ein nEck. Jeder Seite des einen entspricht ein Aussenwinkel des andern.

Nimmt man an, dass das zweite Σ_1 von den zu einander reciproken Systemen ein Strahlenbündel ist, so ist G_1 ein Strahlenkegel, dessen Mantel g_1 von keiner Ebene in mehr als zwei Geraden geschnitten wird, und F_1 das von der Fläche g_1 und den sie umhüllenden Ebenenbüschel ausgeschlossene System von Ebenen. Je zwei Nebenwinkeln, von welcher der eine um die

Figur F beschrieben ist, und also der andere dem Systeme G von Geraden angehört, entsprechen zwei Nebenwinkel, von welchen der eine ein Schnitt des Systems F_1, der andere aber in den Strahlenkegel G_1 beschrieben ist, u. s. w.

181. Es sey wieder F eine ebene Figur, deren Umfang f von keiner Geraden in mehr als zwei Punkten geschnitten wird, und G das von der Linie f und den sie umhüllenden Strahlenbüschel g ausgeschlossene System von Geraden.

Dreht sich eine Gerade, welche die Linie f in zwei Punkten schneidet, um einen Punkt, der entweder in der Figur F oder in ihrer Ergänzung liegt, so bewegen sich die Schnittpunkte in der Linie f im letztern Falle im entgegengesetzten Sinne, im erstern Falle aber in einem und demselben Sinne, so dass, wenn die Gerade einen Strahlenbüschel erster Ordnung beschreibt, zuletzt jeder von den beiden Schnittpunkten die anfängliche Stelle des andern einnimmt.

In der Linie f sind zwei Punkte, in welchen sie von einer Geraden geschnitten wird, durch zwei andere solche Punkte getrennt oder nicht getrennt, je nachdem der Schnittpunkt der beiden Geraden in der Figur F oder ausserhalb derselben liegt.

Die Figur F wird durch jede Gerade, welche die Linie f schneidet, (durch jede in sie

Bewegt sich der Mittelpunkt eines um die Figur F beschriebenen Winkels in einer Geraden, welche entweder im Systeme G oder in der Ergänzung desselben enthalten ist, so bewegen sich seine Schenkel in dem Büschel g im letztern Falle im entgegengesetzten Sinne, im erstern Falle aber in einem und demselben Sinne, so dass, wenn der Mittelpunkt des Winkels jene Gerade beschreibt, zuletzt jeder seiner Schenkel die anfängliche Stelle des andern einnimmt.

In dem Büschel g sind die Schenkel eines um die Figur F beschriebenen Winkels durch zwei andere solche Strahlen getrennt oder nicht getrennt, je nachdem die Gerade, welche die Mittelpunkte der beiden Winkel verbindet, dem Systeme G oder seiner Ergänzung angehört.

Das System G wird durch jeden ausserhalb der Figur F befindlichen Punkt (durch den

beschriebene Strecke) in zwei Figuren getheilt. Jede Strecke, welche einen Punkt der einen dieser Figuren mit einem Punkte der andern verbindet, und die Linie f nicht schneidet, wird von jener Geraden geschnitten.

Nebenwinkel eines jeden um die Figur F beschriebenen Winkels) in zwei Systeme getheilt. Jede Gerade des einen dieser Systeme bildet mit jeder Geraden des andern zwei Winkel, von welchen der eine die Figur F, der andere aber jenen Punkt in sich enthält.

182. Das System von allen in einer und derselben Ebene befindlichen Geraden wird durch drei Punkte A, B, C, welche nicht in einer und derselben Geraden liegen, in vier Systeme getheilt, deren jedes vom Umfange eines Dreiecks ausgeschlossen ist. Je zwei Gerade, welche einem und demselben von den vier Systemen angehören, können durch einen Winkel verbunden werden, welcher keinen der drei Punkte in sich enthält, während je zwei Gerade, welche verschiedenen Systemen angehören, durch jene Punkte getrennt sind.

Bezeichnet man die vier Dreiecke, welche die drei Punkte A, B, C zu Eckpunkten haben, durch ABC, AB·C, AC·B, BC·A, so kann man durch dieselben Ausdrücke auch die vier Systeme von Geraden bezeichnen. Dem Systeme BC·A von Geraden, welches nämlich vom Umfange des Dreiecks BC·A ausgeschlossen ist, gehört jede Gerade an, welche die beiden Seiten AB, AC des Dreiecks ABC schneidet.

183. Eine Ebene wird als System von Punkten durch n Gerade, von welchen keine drei durch einen und denselben Punkt gehen, in $\frac{n(n-1)}{2}+1$ Systeme getheilt. Ist $n>2$, so ist jedes dieser Systeme eine geradlinige Figur, welche lauter ausspringende Winkel hat und von keiner der n Geraden ein Stück in sich enthält. Je-

Das System von allen in einer und derselben Ebene befindlichen Geraden wird durch n Punkte, von welchen keine drei in einer und derselben Geraden liegen, in $\frac{n(n-1)}{2}+1$ Systeme getheilt. Ist $n>2$, so ist jedes dieser Systeme vom Umfange einer geradlinigen Figur ausgeschlossen, welche lauter ausspringende Winkel hat,

der Winkel, welchen zwei der n Geraden mit einander bilden, ist von zwei solchen Figuren ein Aussenwinkel.

und diejenigen der n Punkte, welche keine Eckpunkte derselben sind, in sich enthält. Jede Strecke, welche zwei der n Punkte verbindet, ist eine gemeinschaftliche Seite von zwei solchen Figuren.

Der Ausdruck $\frac{n(n-1)}{2}$ stellt die Anzahl der Punkte vor, in welchen die n Geraden sich schneiden. Um sich nun zu überzeugen, dass die Anzahl der Systeme jene Zahl immer um eins übertreffe, darf man nur bemerken, dass diess für $n=2$ (auch für $n=1$) gilt, und dass, wenn zu m Geraden noch eine hinzukommt, jede von den beiden Zahlen um m vermehrt wird, indem die letzte Gerade durch die m Punkte, in welchen sie die m erstern schneidet, in m Strecken getheilt wird, deren jede eines der vorigen Systeme selbst wieder in zwei Systeme theilt. Es lassen sich hieran noch folgende Bemerkungen knüpfen.

I. Wenn die Ebene eine eigentliche Ebene ist, aber unter den n Geraden die unendlich ferne Gerade derselben sich befindet, und die Anzahl der übrigen durch r bezeichnet wird, so ist die Anzahl der ins Unendliche gehenden Figuren $=2r$ und also die Anzahl der endlichen Figuren $=\frac{r(r+1)}{2}+1-2r=\frac{r(r-3)}{2}+1$.

II. Ist unter den Figuren ein nEck, so sind die übrigen Figuren n Dreiecke und $\frac{n(n-3)}{2}$ Vierecke.

Je zwei aufeinanderfolgende Aussenwinkel des nEcks durchschneiden sich in einem Dreiecke, je zwei nicht aufeinanderfolgende Aussenwinkel aber in einem Vierecke.

Jedes System von Geraden, welches zwei aufeinaderfolgende Seiten des nEcks schneidet, ist vom Umfange eines Dreiecks, jedes System aber, welches zwei nicht aufeinanderfolgende Seiten schneidet, vom Umfange eines Vierecks ausgeschlossen.

III. Ist $n=4$, so sind die Figuren vier Dreiecke und drei Vierecke.

Die zwölf Seiten der vier Dreiecke sind zugleich die zwölf Seiten der drei Vierecke. Je zwei von den vier Geraden enthalten von einem der drei Vierecke zwei einander gegenüberliegende Seiten, von jedem der beiden übrigen aber zwei aufeinanderfolgende Seiten.

Die zwölf Aussenwinkel der vier Dreiecke sind zugleich die zwölf Aussenwinkel der drei Vierecke. Je zwei von den vier Punkten sind in einem der drei Vierecke zwei einander gegenüberliegende, in jedem der beiden übrigen aber zwei aufeinanderfolgende Eckpunkte.

IV. Ist $n=5$, so sind die Figuren fünf Dreiecke, fünf Vierecke und ein Fünfeck. Kommt nämlich zu vier Geraden, durch welche die Ebene in vier Dreiecke und drei Vierecke getheilt wird, noch eine fünfte Gerade hinzu, welche die erstern in vier Punkten schneidet, so werden durch die fünfte Gerade zwei von den vier Dreiecken und zwei von den drei Vierecken getheilt. Dass aber nicht jedes von diesen beiden Vierecken in ein Fünfeck und ein Dreieck und auch nicht jedes in zwei Vierecke getheilt werde, folgt aus II und III.

---

§. 14.

Von den Körpern und den ihnen verwandten Gebilden.

184. Jeder körperliche Raum, welcher keine Linie unparer Ordnung in sich enthält, soll von nun an ein Körper und von der Fläche, welche ihn von dem übrigen Theile des unbegrenzten Raumes trennt, eingeschlossen heissen. Da hiernach der Schnitt eines Körpers mit einer Ebene entweder eine Figur oder der Inbegriff von zwei oder mehrern Figuren ist, und also ausserhalb eines Körpers unendlich viele Linien unparer Ordnung denkbar sind, so folgt, dass die Ergänzung eines Körpers kein Körper ist.

Das Reciproke von einem Körper ist ein von einem Ebenenbündel begrenztes System von Ebenen, welches keinen Ebenen-

büschel unparer Ordnung in sich enthält und daher von jenem Ebenenbündel ausgeschlossen heissen soll.

185. Jede Fläche, durch welche der unbegrenzte Raum (als System von Punkten) in zwei Theile P, Q getheilt wird, die in jedem Stücke der Fläche aneinanderstossen, ist (156) von parer Ordnung.

Jeder Ebenenbündel, durch welchen das System von allen im Raume denkbaren Ebenen in zwei Systeme getheilt wird, die den Ebenenbündel zur gemeinschaftlichen Grenze haben, ist von parer Ordnung.

Eine Gerade geht nämlich eben so oft von P in Q als von Q in P über. Ist in dem einen von diesen Raumtheilen eine Ebene enthalten, welche mit der Fläche keinen Punkt gemein hat, so ist der andere, da keine Linie unparer Ordnung in ihm denkbar ist, ein Körper.

186. Durch jede Fläche F, welche von parer Ordnung, aber nicht aus zwei oder mehrern geschlossenen Flächen zusammengesetzt ist, wird das System von allen im Raume denkbaren Punkten in zwei Systeme getheilt. Jede Linie, welche einen Punkt des einen dieser Systeme mit einem Punkte des andern verbindet, hat mit der Fläche F wenigstens einen Punkt gemein.

Durch jeden Ebenenbündel parer Ordnung, welcher nicht aus zwei oder mehrern geschlossenen Ebenenbündeln zusammengesetzt ist, wird das System von allen im Raume denkbaren Ebenen in zwei Systeme getheilt. Jeder Ebenenbüschel, welcher eine Ebene des einen dieser Systeme mit einer Ebene des andern verbindet, hat mit jenem Ebenenbündel wenigstens eine Ebene gemein.

Es sey AB irgend eine Linie, welche die Fläche F in einem Punkte schneidet, so muss auch (158) jede andere Linie, welche den Punkt A mit dem Punkt B verbindet, da sie mit der erstern eine geschlossene Linie bildet, die Fläche F schneiden, woraus hervorgeht, dass durch diese Fläche der Punkt A vom Punkte B getrennt ist, und also der Raum getheilt wird. Da aber jeder Theil von einer geschlossenen Fläche begrenzt seyn muss, und diese keine andere als die Fläche F seyn kann, so folgt, dass es nur zwei Theile sind.

187. In zwei collinearen Systemen entspricht jedem Körper

K ein Körper K_1, dessen Oberfläche F_1 der Oberfläche F des erstern entspricht. Hat die Fläche F mit derjenigen Ebene U des erstern Systems, welcher die unendlich ferne Ebene des andern entspricht, keinen Punkt gemein, so ist K_1 ein endlicher (eigentlicher) Körper. Es ist alsdann jeder Punkt in der Ebene U der Mittelpunkt eines um den Körper K beschriebenen Strahlenkegels, dem ein um den Körper K_1 beschriebener Strahlencylinder entspricht, und jede Gerade in der Ebene U die Axe eines um den Körper K beschriebenen Flächenwinkels, dem ein um den Körper K_1 beschriebener Parallelraum entspricht.

Wenn die Fläche F von der Ebene U in einem Punkte B oder in einer Linie oder in einem Stücke berührt wird, so geht der Körper K_1 ins Unendliche. Wenn ferner im ersten von diesen Fällen jede Gerade, welche die Ebene U im Punkte B schneidet, aus zwei Strecken besteht, von welchen die eine in dem Körper K, die andere aber ausserhalb desselben liegt, so wird jede eigentliche Gerade, welche durch den unendlich fernen Punkt B_1 geht, durch den eigentlichen Punkt, in welchem sie die Fläche F_1 schneidet, in zwei Halbstrahlen getheilt, von welchen der eine in dem Körper K_1, der andere aber ausserhalb desselben liegt.

Wird der Körper K durch die Ebene U in zwei Theile getheilt, so besteht der Körper K_1 aus zwei Theilen, welche in einem Stücke der unendlich fernen Ebene aneinanderstossen und also nach der gewöhnlichen Ansicht nicht zusammenhängen.

188. Versteht man unter einem Tetraeder einen von vier Dreiecken eingeschlossenen Körper, so giebt es acht Arten von Tetraedern.

Die Flächen eines Tetraeders können nämlich seyn:

1) Vier endliche Dreiecke, was beim endlichen Tetraeder der Fall ist.
2) Ein endliches Dreieck und drei Dreiecke der zweiten Art.
3) Zwei Dreiecke der zweiten und zwei Dreiecke der dritten Art.
4) Drei Dreiecke der dritten und ein Dreieck der sechsten Art.
5) Zwei Dreiecke der dritten und zwei Dreiecke der vierten Art.

6) Ein Dreieck der zweiten, zwei Dreiecke der vierten und ein Dreieck der fünften Art.
7) Ein endliches Dreieck und drei Dreiecke der fünften Art.
8) Vier Dreiecke der fünften Art.

Denkt man sich ein Tetraeder und eine Ebene, so wird die Ebene entweder mit der Oberfläche des Tetraeders gar keinen Punkt gemein haben, oder diese Fläche in einem Eckpunkte oder in einer Kante oder in einem Dreiecke berühren, oder eine oder zwei oder drei oder vier Kanten des Tetraeders schneiden. Nimmt man nun an, dass die Ebene die unendlich ferne Ebene sey, so führt diess auf die obigen acht Arten von Tetraedern.

189. Der unbegrenzte Raum wird durch vier Ebenen, welche nicht durch einen und denselben Punkt gehen, in acht Tetraeder, jedes von den vier Dreikanten nämlich, welche drei der vier Ebenen mit einander bilden, durch seinen Schnitt mit der vierten Ebene in zwei Tetraeder getheilt. Die acht Tetraeder bilden zwei Gruppen, von welchen jede aus vier Tetraedern besteht, so dass je zwei Tetraeder, welche einer und derselben Gruppe angehören, ein Paar Gegenkanten mit einander gemein haben, je zwei Tetraeder aber, welche nicht einer und derselben Gruppe angehören, in einem Dreiecke an einanderstossen und zusammen ein Dreikant erfüllen. Verbindet man zwei ausserhalb der vier Ebenen befindliche Punkte durch eine Strecke und dann auch durch deren Ergänzung, so wird entweder die eine dieser Strecken von keiner der vier Ebenen und also die andere von jeder derselben, oder jede von zweien, oder die eine von einer und die andere von den drei übrigen geschnitten werden, je nachdem nämlich jene Punkte in einem und demselben Tetraeder oder in zwei Tetraedern einer und derselben Gruppe oder nicht in einer und derselben Gruppe liegen.

Schneiden sich je drei der vier Ebenen in einem eigentlichen Punkte, so besteht die eine Gruppe aus einem endlichen Tetraeder und drei Tetraedern der achten Art, die andere aber aus vier Tetraedern der siebenten Art. Schneiden sich drei von den vier Ebenen in drei zu einander parallelen Geraden, so besteht jede von den beiden Gruppen aus einem Tetraeder der zweiten und drei Tetraeder der sechsten Art. Sind zwei der vier Ebe-

nen zu einander parallel, so besteht jede Gruppe aus zwei Tetraedern der dritten und zwei Tetraedern der fünften Art. Ist unter den vier Ebenen die unendlich ferne Ebene, so sind alle acht Tetraeder von der vierten Art (einfache Dreikante.)

190. Wenn die vier Eckpunkte eines Tetraeders und ein Punkt P, welcher in ihm liegt, oder eine Ebene p, welche mit seiner Oberfläche keinen Punkt gemein hat, gegeben sind, so ist das Tetraeder bestimmt. Jede Strecke, welche zwei von den vier gegebenen Eckpunkten verbindet, und von der Ebene, die durch die beiden übrigen und den Punkt P bestimmt ist, geschnitten oder von der Ebene p nicht geschnitten wird, ist eine Kante des Tetraeders.

Hat man irgend eines der acht Tetraeder, welche die vier Punkte A, B, C, D zu Eckpunkten haben, durch ABCD bezeichnet, so können die drei übrigen Tetraeder derselben Gruppe durch AB·CD, AC·BD, AD·BC und die vier Tetraeder der andern Gruppe durch ABC·D, ABD·C, ACD·B, BCD·A bezeichnet werden, so dass also z. B. das erste und vierte die Kanten AD, BC gemein haben, das erste und letzte aber in dem Dreiecke BCD aneinanderstossen.

191. Drei Flächenwinkel ab, ac, ad, welche einen Schenkel a mit einander gemein haben, deren Axen aber nicht alle drei durch einen und denselben Punkt gehen, durchschneiden sich in einem Tetraeder, dem jeder Punkt angehört, in welchem eine Ebene des ersten, eine Ebene des zweiten und eine Ebene des dritten Winkels sich schneiden. Bezeichnet man die drei Winkel, von welchen je zwei in einem Dreikante sich durchschneiden, dessen Schnitt mit dem dritten jenes Tetraeder ist, durch p, q, r und ihre Nebenwinkel durch p_1, q_1, r_1, so kann man die acht Tetraeder, welche die vier Ebenen a, b, c, d mit einander bilden, durch pqr, pq_1r_1, p_1qr_1, p_1q_1r, pqr_1, pq_1r, $p_1$qr, $p_1q_1r_1$ bezeichnen, so dass also im letzten die drei Winkel p_1, q_1, r_1 sich durchschneiden.

192. Wenn die Oberfläche F eines Körpers K von keiner Geraden in mehr als zwei Punkten geschnitten wird, so gilt diess auch vom Umfange einer jeden ebenen Figur, welche ein Schnitt des Körpers ist. Jeder Punkt M, welcher ausserhalb des Kör-

pers liegt, ist der Mittelpunkt eines um ihn beschriebenen Strahlenkegels, dessen Mantel von keiner Ebene in mehr als zwei Strahlen geschnitten wird. Jede Gerade, welche mit der Oberfläche des Körpers keinen Punkt gemein hat, ist die Axe eines um ihn beschriebenen Flächenwinkels, welcher, wenn die Gerade durch den Punkt M geht, zugleich um jenen Strahlenkegel beschrieben ist. Jede Ebene E, welche durch den Punkt M geht und den Körper K schneidet, enthält einen Winkel, welcher den Punkt M zum Mittelpunkt hat und um den Schnitt beschrieben ist. Lässt man um eine in diesem Winkel liegende feste Gerade die Ebene E sich drehen, so dass sie einen Ebenenbüschel erster Ordnung beschreibt, so beschreiben die Schenkel des Winkels die erwähnte Kegelfläche.

Da es unendlich viele Ebenen giebt, welche die Oberfläche des Körpers K nicht schneiden, so kann man zu demselben, wenn er auch kein endlicher Körper ist, einen ihm collineären endlichen Körper sich denken.

193. Wird die Oberfläche k eines Körpers K von keiner Geraden in mehr als zwei Punkten geschnitten, so soll der Inbegriff s von allen Ebenen, welche die Fläche k berühren, der diese Fläche oder auch der den Körper K umhüllende Ebenenbündel genannt werden. Durch den Ebenenbündel k wird das System von allen im Raume denkbaren Ebenen in zwei Systeme getheilt, von welchen das eine S von der Fläche ausgeschlossen und (185) das Reciproke von einem Körper ist, das andere aber unendlich viele Ebenenbündel erster Ordnung in sich enthält. Eine Ebene, welche nicht in der gemeinschaftlichen Grenze dieser beiden Systeme liegt, gehört dem erstern oder dem letztern an, je nachdem sie die Fläche k nicht schneidet oder schneidet. Ist K ein ebenflächiger Körper, welcher n Ecken hat, so ist der Ebenenbündel s aus n Ebenenbündeln, deren jeder vom Mantel einer Strahlenpyramide (von einer Raumecke) ausgeschlossen ist, zusammengesetzt, so dass aber auch noch die Grenzen dieser Ebenenbündel ihm angehören. Wird die Fläche k in jedem ihrer Punkte nur von einer Ebene berührt, so ist s der ihr sich anschmiegende Ebenenbündel. Bezeichnet man das System von Geraden, welche die Fläche k schneiden durch V und das System

von Geraden, welche mit ihr keinen Punkt gemein haben, durch W, so gilt Folgendes:

Jede Gerade des Systems V wird durch die beiden Punkte, in welchen sie die Fläche k schneidet, in zwei Strecken getheilt, von welchen die eine in den Körper K beschrieben ist, die andere aber ausserhalb desselben liegt. Alle Ebenen, welche durch die Gerade gehen, liegen ausserhalb des Systems S.

Jeder Ebenenbüschel I. Ordnung, dessen Axe eine Gerade des Systems W ist, wird durch die beiden Ebenen, welche er mit dem Ebenenbündel s gemein hat, in zwei Winkel getheilt, von welchen der eine dem System S angehört, der andere aber um den Körper K beschrieben ist. Alle Punkte der Geraden liegen ausserhalb des Körpers K.

Liegt eine Gerade h in der gemeinschaftlichen Grenze der beiden Systeme V, W, so hat

das gerade Gebilde h mit der Fläche k entweder α) nur einen Punkt oder β) eine Strecke gemein.

der Ebenenbüschel h mit dem Ebenenbündel s entweder α_1) nur eine Ebene oder β_1) einen Winkel gemein.

Wenn K ein ebenflächiger Körper ist, so findet der Fall $\alpha\alpha_1$ oder $\alpha\beta_1$ oder $\beta\alpha_1$ oder $\beta\beta_1$ statt, je nachdem die Gerade h die Fläche k in einem in einer Kante befindlichen Punkte oder in einem Eckpunkte oder in einer Strecke, welche keine Kante oder eine Kante ist, berührt.

Die gemeinschaftliche Grenze der beiden Systeme V, W hat mit

jeder Ebene, welche ausserhalb des Systems S liegt, einen Strahlenbüschel gemein, der die Linie umhüllt, in welcher die Ebene die Fläche k schneidet.

jedem Strahlenbündel, dessen Mittelpunkt ausserhalb des Körpers K liegt, eine Kegelfläche gemein, welche der dem Strahlenbündel und dem Ebenenbündel s gemeinschaftliche Ebenenbüschel umhüllt.

194. In zwei reciproken Systemen entspricht jedem Körper K, dessen Oberfläche k von keiner Geraden in mehr als zwei

zwei Punkten geschnitten wird, ein von der Oberfläche eines solchen Körpers ausgeschlossenes System K_1 von Ebenen.

Dem von der Fläche k ausgeschlossenen Systeme S von Ebenen entspricht nämlich ein Körper S_1, dessen Oberfläche s_1 dem die Fläche k umhüllenden Ebenenbündel s (der Grenze des Systems S) entspricht. Jeder Geraden, welche die Fläche k schneidet, durch welche also keine Ebene des Bündels s geht, entspricht eine Gerade, welche mit der Fläche s_1 keinen Punkt gemein hat. Jeder Geraden, welche mit der Fläche k keinen Punkt gemein hat, in welcher also zwei Ebenen des Bündels s sich schneiden, entspricht eine Gerade, welche mit der Fläche s_1 zwei Punkte gemein hat. Wenn eine Gerade a die Fläche k berührt, und also der Ebenenbüschel a mit dem Ebenenbündel s entweder nur eine Ebene oder einen Winkel gemein hat, so hat die ihr entsprechende Gerade mit der Fläche s_1 entweder nur einen Punkt oder eine Strecke gemein. Jedem Punkte, welcher in dem Körper K liegt, durch welchen also keine Ebene des Bündels s geht, entspricht eine Ebene, welche mit der Fläche s_1 keinen Punkt gemein hat. Liegt ein Punkt P in der Fläche k, so dass also der Ebenenbündel P erster Ordnung mit dem Ebenenbündel s entweder nur eine Ebene oder einen Winkel oder ein von einer Winkelfläche ausgeschlossenes System von Ebenen gemein hat, so gehört die jenem Punkte entsprechende Ebene P_1, da sie mit der Fläche s_1 entweder nur einen Punkt oder eine Strecke oder eine Figur gemein hat, dem diese Fläche umhüllenden Ebenenbündel an. Jedem Punkte M, welcher ausserhalb des Körpers K liegt und also der Mittelpunkt eines um denselben beschriebenen Strahlenkegels ist, entspricht eine Ebene M_1, welche den Körper S_1 schneidet. Gleichwie nun der Körper S_1 durch die Ebene M_1 (durch seinen Schnitt F_1 mit der Ebene M_1) in zwei Theile getheilt wird, so dass jede Strecke, welche irgend einen Punkt des einen Theils mit irgend einem Punkte des andern verbindet und die Fläche s_1 nicht schneidet, von der Ebene M_1 geschnitten wird, so wird das System S von Ebenen durch den Punks M (durch den von dem Mantel jenes Strahlenkegels ausgeschlossenen Ebenenbündel F) in zwei Systeme getheilt, so dass jede Ebene des einen dieser Systeme mit jeder Ebene des andern zwei Winkel

bildet, von welchen der eine den Körper K, der andere aber den Punkt M in sich enthält.

Ist K ein ebenflächiger Körper, so ist auch S_1 ein ebenflächiger Körper. Jeder Kante des einen Körpers entspricht alsdann ein Aussenwinkel des andern, jedem Eckpunkte des einen, in welchem n Kanten zusammenstossen, eine Ebene, welche die Oberfläche des andern in einem n Ecke berührt.

195. Durch vier Punkte A, B, C, D, welche nicht in einerlei Ebene liegen, wird (189) das System von allen im Raume denkbaren Ebenen in acht Systeme getheilt, deren jedes von der Oberfläche eines Tetraeders ausgeschlossen ist, welches jene Punkte zu Eckpunkten hat. Jede Ebene, welche durch keinen der vier Punkte geht, bildet mit jeder andern solchen Ebene zwei Winkel, von welchen entweder der eine gar keinen der vier Punkte und also der andere alle vier, oder jeder zwei oder der eine einen und also der andere drei in sich enthält, je nachdem nämlich die beiden Ebenen in einem und demselben Systeme oder in zwei Systemen einer und derselben Gruppe oder nicht in einer und derselben Gruppe liegen.

Das System ABC·D, welches nämlich von der Oberfläche des Tetraeders ABC·D ausgeschlossen ist, schneidet die drei Kanten AD, BD, CD des Tetraeders ABCD, während das System AB·CD die vier Kanten AC, AD, BC, BD des Tetraeders ABCD schneidet. Jede Ebene des Systems ABCD bildet also mit jeder Ebene des Systems ABC·D zwei Winkel, von welchen der eine die drei Punkte A, B, C und der andere den Punkt D in sich enthält, mit jeder Ebene des Systems AB·CD aber zwei Winkel, von welchen der eine die Punkte A, B und der andere die Punkte C, D in sich enthält.

196. Der unbegrenzte Raum wird als System von Punkten durch n Ebenen, von welchen keine drei durch eine und dieselbe Gerade und keine vier durch einen und denselben Punkt gehen, in $n + \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}$ Systeme getheilt.

Das System von allen im Raume denkbaren Ebenen wird durch n Punkte, von welchen keine drei in einer und derselben Geraden und keine vier in einerlei Ebene liegen, in $n + \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}$ Systeme getheilt. Ist $n > 3$, so

Theile getheilt. Ist $n > 3$, so ist jeder der Raumtheile ein Polyeder, welches lauter ausspringende Winkel und lauter dreikantige Ecken hat, und durch keine der n Ebenen selbst wieder getheilt wird. Jede Ecke eines jeden dieser Polyeder ist von einer Ecke eines andern die Scheitelecke.

ist jedes dieser Systeme von der Oberfläche eines Polyeders ausgeschlossen, welches lauter ausspringende Winkel und lauter dreieckige Flächen hat, und diejenigen von den n Punkten, welnicht Eckpunkte desselben sind, in sich enhält. In jedem Dreiecke, welches drei der n Punkte zu Eckpunkten hat, stossen zwei der Polyeder aneinander.

Um sich zu überzeugen, dass für jeden Werth von n die Anzahl der Raumtheile der Anzahl der Ebenen mehr der Anzahl ihrer Schnittpunkte gleich sey, darf man nur bemerken, dass diess für $n = 3$ (auch für $n = 1$ und $n = 2$) der Fall ist, und dass, wenn zu m Ebenen noch eine hinzukommt, dadurch die Anzahl der Ebenen um 1, die Anzahl ihrer Schnittpunkte um $\frac{m(m-1)}{2}$ und die Anzahl der Raumtheile um die Summe $1 + \frac{m(m-1)}{2}$ sich vermehrt, indem die letzte Ebene (183) durch die Spuren der m erstern in $1 + \frac{m(m-1)}{2}$ Theile getheilt wird, deren jeder einen der vorigen Raumtheile selbst wieder in zwei Theile theilt.

Durch $r+1$ Ebenen, von welchen keine drei durch eine und dieselbe Gerade und keine vier durch einen und denselben Punkt gehen, wird also der Raum in $r + 1 + \frac{(r+1)\,r\,(r-1)}{2.3}$ $= \frac{r(rr+5)}{6} + 1$ Theile getheilt. Ist unter den Ebenen die unendlich ferne Ebene, so dass r also die Anzahl der übrigen bezeichnet, so ist die Anzahl der ins Unendliche gehenden Raumtheile $= r(r-1) + 2$ und also die Anzahl der endlichen $= \frac{(r-1)(r-2)(r-3)}{2.3}$.

§. 15.

Rückkehrelemente.

197. Man nehme an, dass ein Punkt P in einer Geraden P sich bewege, oder die Gerade P in der Ebene P um den Punkt P oder die Ebene P um die Gerade P sich drehe, oder dass auf diese Weise zwei von den drei Elementen P oder alle drei zugleich sich bewegen. Hat nun der Punkt P sich bewegt und in der Stelle B den Sinn seiner Bewegung in der Geraden P geändert, so soll der Punkt B ein Rückkehrpunkt der vom Punkte P beschriebenen Linie oder auch, wenn diese krumm ist (die Gerade P zugleich um den Punkt P sich gedreht hat), eine Spitze derselben genannt werden. Hat die Gerade P sich gedreht und in der Stelle B den Sinn der Drehung geändert, so ist die Gerade B ein Rückkehrstrahl der von der Geraden P beschriebenen Regelfläche. Wenn endlich die Ebene P sich gedreht und in der Stelle B den Sinn der Drehung geändert hat, so ist die Ebene B eine Rückkehrebene des von der Ebene P beschriebenen Ebenenbüschels. Der Mittelpunkt eines Rückkehrstrahles in einem Strahlenbüschel, welcher einer ebenen Curve sich anschmiegt, heisst auch ein Wendepunkt dieser Curve.

198. Bezeichnet man den Fall, in welchem ein Element B kein Rückkehrelement ist, durch $-$, den Fall aber, in welchem dasselbe ein Rückkehrelement ist, durch $+$, so muss in Hinsicht auf jeden Punkt B einer ebenen Curve s und den dazu gehörigen Strahl B des ihr sich anschmiegenden Strahlenbüschels s einer von den vier Fällen

$$- -, \; - +, \; + -, \; + +$$

Statt finden. Der Punkt B ist im ersten Falle ein gewöhnlicher Punkt der Curve, im zweiten ein gewöhnlicher Wendepunkt, im dritten eine gewöhnliche Spitze und im vierten, in welchem sowohl der Punkt B ein Rückkehrpunkt der Curve s als auch der Strahl B ein Rückkehrstrahl des Büschel s ist, Spitze und Wendepunkt zugleich. Die Curve s wird im $\left\{\begin{matrix}\text{ersten}\\\text{dritten}\end{matrix}\right\}$ Falle im Punkte B von der Geraden B $\left\{\begin{matrix}\text{berührt}\\\text{geschnitten}\end{matrix}\right\}$, von jeder andern durch den

Punkt B gehenden Geraden aber in ihm $\left\{\begin{matrix}\text{geschnitten}\\ \text{berührt}\end{matrix}\right\}$. Im $\left\{\begin{matrix}\text{zweiten}\\ \text{vierten}\end{matrix}\right\}$ Falle wird die Curve von jeder durch den Punkt B gehenden Geraden in diesem Punkte $\left\{\begin{matrix}\text{geschnitten}\\ \text{berührt}\end{matrix}\right\}$. Im ersten Falle heisst die Curve im Punkte B auf der Seite, auf welcher sie von der Geraden B berührt wird, erhaben, auf der entgegengesetzten Seite aber hohl.

Wenn der Curve s in dem einen von zwei reciproken ebenen Systemen der Strahlenbüschel s_1 im andern und also dem Strahlenbüschel s die Curve s_1 entspricht, und in Hinsicht auf den Punkt B und den Strahl B der Fall xy Statt findet, so findet in Hinsicht auf den dieser Geraden entsprechenden Punkt B_1 der Curve s_1 und den dazu gehörigen Strahl des Büschels s_1 der Fall yx Statt, daher die Anzahl der Wendepunkte in einer jeden von den beiden Curven der Anzahl der Rückkehrpunkte in der andern gleich ist. In collineären Systemen ist in dieser Beziehung zwischen zwei einander entsprechenden Fällen nie ein Unterschied.

Bezeichnet xy eine Combination aus den Zeichen —, +, so soll unter $\overline{xy}$ das Zeichen — oder + verstanden werden, je nachdem die Anzahl der in der Combination enthaltenen — Zeichen eine unpare oder pare Zahl ist.

199. Bildet in einer Ebene eine krumme Linie eine Ecke, so wird sie in dem Eckpunkte von den Geraden, welche in ihm sich ihr anschmiegen, entweder berührt oder geschnitten oder von der einen berührt und von der andern geschnitten. Im letztern Falle ist der Eckpunkt zugleich ein Wendepunkt.

Ist von zwei aufeinanderfolgenden Stücken AB, BC das eine auf der einen Seite, das andere aber auf der entgegengesetzten Seite der Linie hohl, so muss der Punkt B ein Wendepunkt derselben seyn.

200. Wenn in einer Ebene die eine P von zwei sich schneidenden Geraden, um einen ausserhalb der andern Q befindlichen Punkte P sich drehend, einen Strahlenbüschel beschreibt, so beschreibt der Schnittpunkt Q der beiden Geraden eine Linie. Je-

der Rückkehrpunkt dieser Linie liegt in einem Rückkehrstrahle jenes Büschels. Es wird hiebei vorausgesetzt, dass der Punkt P entweder fest sey oder nur in der um ihn sich drehenden Geraden P sich bewege, und dass die Gerade Q entweder gar nicht oder nur um den in ihr sich bewegenden Punkt Q sich drehe.

201. Es bezeichne wieder xy den Fall, welcher in Hinsicht auf einen Punkt B einer ebenen Curve s und den dazu gehörigen Strahl B des ihr sich anschmiegenden Strahlenbüchels s Statt findet.

Beschreibt ein Punkt die Curve s, so beschreibt die Gerade, welche ihn mit einem festen Punkte S verbindet, einen Strahlenbüschel, der von der Curve ein Schein ist. In Hinsicht auf denjenigen Strahl dieses Büschels, welcher den Punkt B projicirt, findet der Fall x oder $\overline{xy}$ oder y Statt, je nachdem der Punkt S ausserhalb der Geraden B liegt, oder ein vom Punkte B verschiedener Punkt dieser Geraden oder der Punkt B selbst ist.

Beschreibt ein Strahl den Büschel s, so beschreibt seine Spur in jeder festen Geraden S_1 eine Linie, welche ein Schnitt des Strahlenbüschels ist. In Hinsicht auf denjenigen Punkt dieser Linie, welcher von dem Strahle B die Spur ist, findet der Fall y oder $\overline{xy}$ oder x Statt, je nachdem die Gerade S_1 die Gerade B in einem vom Punkte B verschiedenen Punkte oder im Punkte B schneidet, oder die Gerade B selbst ist.

202. Jedes geschlossene Gebilde, welche in einem einförmigen Grundgebilde enthalten ist, hat eine pare Anzahl von Rückkehrelementen. Hat z. B. in einer festen Geraden ein Punkt von A aus sich bewegt und den Sinn der Bewegung n mal geändert, so hat er zuletzt, wenn n eine pare Zahl ist, in dem anfänglichen, im entgegengesetzten Falle aber in dem entgegengesetzten Sinne sich bewegt. Ist nun die vom Punkte beschriebene Linie geschlossen, so ist der Punkt A als ein in ihr liegender Punkt im erstern der erwähnten Fälle kein Rückkehrpunkt, im letztern aber ein Rückkehrpunkt, und mithin in jedem Falle die Anzahl aller Rückkehrpunkte eine pare Zahl.

203. Eine geschlossene ebene Curve s, der also ein geschlos-

sener Strahlenbüschel s sich anschmiegt, hat eine pare oder unpare Anzahl von

Wendepunkten, je nachdem sie von parer oder unparer Ordnung ist.	Rückkehrpunkten, je nachdem der Strahlenbüschel s von parer oder unparer Ordnung ist.

Wenn nämlich die Curve m Wendepunkte hat, und von einer Geraden u, welche weder durch einen dieser Punkte geht, noch dem Strahlenbüschel s angehört, in n Punkten geschnitten wird, so enthält (201) der Schnitt dieses Büschels mit der Geraden u m + n Rückkehrpunkte, woraus man (202) schliessen kann, dass die Zahlen m, n entweder beide pare oder beide unpare Zahlen sind.

204. Wenn in Hinsicht auf einen Punkt B einer ebenen Curve und den dazu gehörigen Strahl B des ihr sich anschmiegenden Strahlenbüschels der Fall xy Statt findet, und $\overline{xy}$ durch y_1 bezeichnet ($= y_1$ gesetzt) wird, so kann man an der Combination xy_1, in welcher das Zeichen — Schneiden, das Zeichen + aber Berühren bedeutet, sogleich erkennen, ob die Curve von einer durch den Punkt B gehenden Geraden in diesem Punkte geschnitten oder berührt wird. Das erstere Zeichen in der Combination bezieht sich auf eine von B verschiedene Gerade, das letztere aber auf diese Gerade. Will man umgekehrt aus der Combination xy_1 die Combination xy ableiten, so darf man nur bemerken, dass $y = xy_1$ ist. Es sey z. B. $xy_1 = - -$, so dass also die Curve von jeder durch den Punkt B gehenden Geraden in diesem Punkte geschnitten wird, so ist $xy = - +$ und mithin der Punkt B ein gewöhnlicher Wendepunkt. Es sind hiedurch die in 198 enthaltenen Sätze unter ein einfaches Gesetz gebracht.

205. In Hinsicht auf einen Punkt B einer gewundenen Curve s, den dazu gehörigen Strahl B der ihr sich anschmiegenden Regelfläche und die dazu gehörige Ebene des beiden Gebilden sich anschmiegenden Ebenenbüschels muss einer von den acht Fällen

$$- - -,\ - - +,\ - + -,\ - + +$$
$$+ - -,\ + - +,\ + + -,\ + + +$$

Statt finden. Im ersten Falle heisst der Punkt B ein gewöhnlicher Punkt der Curve.

Wenn der Fall, welcher Statt findet, durch xyz bezeichnet wird, und dem Ebenenbüschel s in dem einen von zwei reciproken Systemen die Curve s_1 im andern entspricht, so findet in Hinsicht auf den der Ebene B entsprechenden Punkt B_1 der Curve s_1, den dazu gehörigen Strahl der ihr sich anschmiegenden Regelfläche und die dazu gehörige Ebene des beiden Gebilden sich anschmiegenden Ebenenbüschels der Fall zyx Statt.

206. Wenn in Hinsicht auf den Strahl B einer abwickelbaren Regelfläche und die Ebene B des ihr sich anschmiegenden Ebenenbüschels der Fall yz Statt findet, und $\overline{yz} = z^1$ gesetzt wird, so erkennt man an der Combination yz^1, in welcher das Zeichen — Schneiden, das Zeichen + aber Berühren bedeutet, ob die Fläche von einer durch die Gerade B gehenden Ebene in dieser Geraden geschnitten oder berührt wird. Das letztere Zeichen in der Combination bezieht sich auf die Ebene B, das erstere aber auf eine andere durch die Gerade B gehende Ebene.

Es ist hier ganz einerlei, ob ein die Fläche beschreibender Strahl um einen festen Punkt oder um einen in ihm sich bewegenden Punkt sich dreht. Im erstern Falle, in welchem die Fläche eine Kegelfläche ist, entspricht der Satz dem in 204 enthaltenen.

207. Wenn in Hinsicht auf den Punkt B einer gewundenen Curve s, den Strahl B der ihr sich anschmiegenden Regelfläche s und die Ebene B des beiden Gebilden sich anschmiegenden Ebenenbüschels s der Fall xyz Statt findet, und $xy = y_1$, xyz (oder $\overline{y_1 z}$) $= z_1$ ist, so erkennt man an der Combination xy_1z_1, in welcher das Zeichen — Schneiden, das Zeichen + aber Berühren bedeutet, ob die Curve von einer durch den Punkt B gehenden Ebene in diesem Punkte geschnitten oder berührt wird. Das letzte Zeichen in der Combination bezieht sich auf die Ebene B, das mittlere auf eine andere durch die Gerade B gehende Ebene b und das erste auf eine Ebene a, welche die Gerade B im Punkte B schneidet. Ist z. B. $xyz = - - -$ und folglich $xy_1z_1 = - + -$, so wird die Curve im Punkte B von den Ebenen a, B geschnitten, von der Ebene b aber berührt. Ist $xyz = - + +$ und folglich $xy_1z_1 = - - -$, so wird

die Curve von jeder durch den Punkt B gehenden Ebene in diesem Punkte geschnitten.

Will man aus der Combination $x y_1 z_1$ die Combination $\overline{xyz}$ ableiten, so darf man nur bemerken, dass $y = \overline{x y_1}$ und $z = \overline{y_1 z_1}$ ist. Wenn z. B. die Curve im Punkte B von der Ebene B berührt, von jeder andern durch ihn gehenden Ebene aber geschnitten wird, und also $x y_1 z_1 = - - +$ ist, so ist $\overline{xyz} = - + -$.

208. Es bezeichne wieder $\overline{xyz}$ den Fall, welcher in Hinsicht auf einen Punkt B einer gewundenen Curve s, den Strahl B der ihr sich anschmiegenden Regelfläche und die Ebene B des beiden Gebilden sich anschmiegenden Ebenbüschels Statt findet.

Beschreibt ein Punkt P die Curve s, so beschreibt die Ebene h P, welche den Punkt mit einer festen Gerade verbindet, den Ebenenbüschel, welcher die Curve aus der Axe h projicirt.

In Hinsicht auf die Ebene h B dieses Büschels, welche nämlich den Punkt B der Curve projicirt, findet der Fall x oder $\overline{xy}$ oder y oder z oder $\overline{yz}$ oder $\overline{xyz}$ statt, je nachdem die Gerade h die Ebene B in einem ausserhalb der Geraden B befindlichen Punkte, oder in einem vom Punkte B verschiedenen Punkte der Geraden B oder im Punkte B schneidet, oder die Gerade B oder eine andere durch den Punkt B gehende Gerade der Ebene B oder eine nicht durch den Punkt B gehende Gerade der Ebene B ist. In den drei letztern Fällen fällt die Ebene h B mit der Ebene B zusammen.

Beschreibt eine Ebene P den Ebenenbüschel s, so beschreibt ihre Spur h P in einer festen Geraden h die Linie, in welcher der Ebenenbüschel von der Geraden h geschnitten wird.

In Hinsicht auf den Punkt h B dieser Linie, welcher nämlich der Schnittpunkt der Geraden h mit der Ebene B ist, findet der Fall z oder $\overline{yz}$ oder y oder x oder $\overline{xy}$ oder $\overline{xyz}$ statt, je nachdem die Gerade h die Ebene B in einem ausserhalb der Geraden B befindlichen Punkte oder in einem vom Punkte B verschiedenen Punkte der Geraden B schneidet, oder, ohne durch den Punkt B zu gehen, in der Ebene B liegt, oder die Gerade B oder eine andere durch den Punkt B gehende Gerade der Ebene B oder eine durch den Punkt B gehende, aber ausserhalb der Ebene B befindliche Gerade ist. In den drei letz-

tern Fällen fällt der Punkt h B mit dem Punkte B zusammen.

Wenn z. B. h die Gerade B ist, und der Punkt P bei seinem Durchgange durch den Punkt B von der einen Seite der Ebene B auf die andere Seite dieser Ebene und in der Ebene hP von der einen Seite der Geraden h auf die andere Seite dieser Geraden übergeht, oder auch, wenn weder das eine noch das andere der Fall ist, so muss die Ebene B eine Rückkehrebene des Büschels h seyn.

209. Angenommen dass s, B, xyz das Vorige bedeuten, so werden

die Curve s und die Regelfläche s aus jedem Punkte M durch eine Kegelfläche S und den derselben sich anschmiegenden Ebenenbüschel S projicirt. In Hinsicht auf den Strahl MB der Kegelfläche, welcher nämlich den Punkt B projicirt, und die ihm zugehörige Ebene MB des Ebenenbüschels S findet der Fall yz oder $\overline{xyz}$ oder $x\overline{yz}$ oder xy statt, je nachdem der Punkt M der Punkt B oder ein anderer Punkt der Geraden B oder ein ausserhalb dieser Geraden befindlicher Punkt der Ebene B ist, oder ausserhalb dieser Ebene liegt. In den drei ersten Fällen fällt die Ebene MB mit der Ebene B, in den beiden ersten auch die Gerade MB mit der Geraden B zusammen.

die Regelfläche s und der Ebenenbüschel s von jeder Ebene N in einer Curve K und dem derselben sich anschmiegenden Strahlenbüschel K geschnitten. In Hinsicht auf den Punkt NB der Curve K, in welchem nämlich die Ebene N von der Geraden B geschnitten wird, und den ihm zugehörigen Strahl des Büschels K findet der Fall xy oder $x\overline{yz}$ oder $\overline{xyz}$ oder yz statt, je nachdem die Ebene N die Ebene B oder eine andere durch die Gerade B gehende Ebene ist, oder diese Gerade im Punkte B oder in einem andern Punkte schneidet. In den drei ersten Fällen fällt der Punkt NB mit dem Punkte B, in den beiden ersten auch die Gerade NB mit der Geraden B zusammen.

210. Eine Curve $\left\{\begin{matrix}\text{parer}\\\text{unparer}\end{matrix}\right\}$ Ordnung wird aus jedem Punkte, welcher in ihr liegt, aber

Ein Ebenenbüschel $\left\{\begin{matrix}\text{parer}\\\text{unparer}\end{matrix}\right\}$ Ordnung, der einer Regelfläche sich anschmiegt, wird von jeder

kein Rückkehrpunkt derselben ist, durch eine Winkelfläche $\left\{\begin{matrix}\text{unparer}\\\text{parer}\end{matrix}\right\}$ Ordnung, aus jedem Rückkehrpunkte aber durch eine Winkelfläche $\left\{\begin{matrix}\text{parer}\\\text{unparer}\end{matrix}\right\}$ Ordnung projicirt.

Ebene, die ihm angehört, aber keine Rückkehrebene desselben ist, in einem Strahlenbüschel $\left\{\begin{matrix}\text{unparer}\\\text{parer}\end{matrix}\right\}$ Ordnung, von jeder Rückkehrebene aber in einem Strahlenbüschel $\left\{\begin{matrix}\text{parer}\\\text{unparer}\end{matrix}\right\}$ Ordnung geschnitten.

Wenn nämlich eine Ebene, welche durch den Punkt S der Curve, aber nicht durch die in diesem Punkte derselben sich anschmiegende Gerade geht, die Curve in n Punkten schneidet, so schneidet sie die Fläche, welche aus dem Punkte S die Curve projicirt, in n oder n — 1 Strahlen, je nachdem der Punkt S ein Rückkehrpunkt oder kein Rückkehrpunkt der Curve ist.

211. Die Anzahl m der Rückkehrpunkte einer geschlossenen gewundenen Curve s ist eine pare oder unpare Zahl, je nachdem die der Curve sich anschmiegende Regelfläche s von parer oder unparer Ordnung ist. Dasselbe gilt von der Anzahl n der Rückkehrebenen des der Regelfläche s sich anschmiegenden Ebenenbüschels s.

Die Regelfläche s wird nämlich nach 209 von jeder Ebene, welche durch keinen Strahl derselben geht, in einer Curve geschnitten, welche n Wendepunkte hat, woraus (203) der letztere Satz folgt. Es ist aber hiedurch auch der erstere (reciproke) Satz bewiesen. 167.

212. Die Anzahl r der Rückkehrstrahlen einer geschlossenen Regelfläche s, welche einer gewundenen Curve sich anschmiegt, ist eine pare Zahl, wenn die Curve s und der ihr sich anschmiegende Ebenenbüschel entweder beide von parer oder beide von unparer Ordnung sind. Ist aber das eine von diesen beiden Gebilden von parer und das andere von unparer Ordnung, so ist r eine unpare Zahl.

Es werde die Curve s von einer Ebene, welche weder durch einen ungewöhnlichen Punkt der Curve noch durch einen Strahl der Regelfläche s geht, in n Punkten geschnitten, so hat (209) die Curve K, in welcher die Regelfläche s von jener Ebene ge-

schnitten wird, $n+r$ Rückkehrpunkte, woraus man (203) schliessen kann, dass der der Curve K sich anschmiegende Strahlenbüschel und mithin auch (165) der Ebenenbüschel s von parer oder unparer Ordnung sey, je nachdem $n+r$ eine pare oder unpare Zahl ist.

---

§. 16.

Involutionen.

213. Wenn in zwei zu einander projektivischen Grundgebilden je zwei homologe Elemente P, P_1 einander doppelt (abwechselnd) entsprechen, nämlich dem Elemente P des einen Gebildes das Element P_1 des andern und dem Elemente P_1 des erstern das Element P des letztern entspricht, so heissen die Gebilde involutorisch liegend ($\overline{\wedge}$). Es wird hiebei vorausgesetzt, dass die zu einander projektivischen Grundgebilde nicht alle ihre Elemente entsprechend gemein haben, aber doch jedes Element des einen auch ein Element des andern sey.

Gewöhnlich wird von zwei involutorisch liegenden Gebilden nur wie von einem Gebilde gesprochen, dessen Elemente involutorisch gepaart seyen, daher das Gebilde, wenn in ihm je zwei einander zugeordnete Elemente mit einander vertauscht werden, so dass dasjenige, welches vorher als das erstere betrachtet wurde, alsdann als das letztere erscheint, dieser seiner Permutation projektivisch sey. Sind z. B. AA_1, BB_1, CC_1 drei Elementenpaare, so ist $AA_1BB_1CC_1 \overline{\wedge} A_1AB_1BC_1C$, $AB_1CA_1BC_1 \overline{\wedge} A_1BC_1AB_1C$ u. s. w.

214. Zwei ungleichartige einförmige Gebilde oder ein ebenes System U und ein Strahlenbündel S, welche zu einander projektivisch sind, sollen involutorisch liegend heissen, wenn das eine Gebilde mit einem Schnitte des andern involutorisch liegt. Entspricht dem Elemente P des ebenen Systems das Element SP_1 des Strahlenbündels, welches nämlich die Ebene U in P_1 schneidet, so muss, wenn die Gebilde involutorisch liegen, dem Elemente P_1 des ebenen Systems das Element SP des Strahlenbündels entsprechen. Liegen ein gerades Gebilde u und ein Ebenen-

büschel s, welche zu einander projektivisch sind, involutorisch, so muss, wenn dem Punkte P des geraden Gebildes die Ebene sP_1 des Büschels entspricht, welche die Gerade u in dem Punkte P_1 schneidet, diesem Punkte des erstern Gebildes die Ebene sP des letztern entsprechen.

215. Wenn in zwei zu einander projektivischen einförmigen Gebilden irgend zwei Elemente A, A_1 einander doppelt entsprechen, so liegen die Gebilde involutorisch.

Wenn nämlich B ein drittes Element des einen Gebildes und B_1 das ihm entsprechende Element des andern ist, so muss, weil (119) $AA_1BB_1 \pi A_1AB_1B$ ist, auch dem Elemente B_1 des erstern Gebildes das Element B des letztern entsprechen. Da alsdann ferner dem Stücke ABA_1 das Stück A_1B_1A entspricht, so folgt noch, dass die beiden Gebilde entweder gar kein Element oder zwei Elemente entsprechend gemein haben, je nachdem nämlich die Elemente A, A_1 durch die Elemente B, B_1 getrennt oder nicht getrennt sind. 112.

Sind ein gerades Gebilde und ein Ebenenbüschel, dessen Axe das gerade Gebilde nicht schneidet, projektivisch so aufeinander bezogen, dass von irgend zwei Punkten A, A_1 des geraden Gebildes jeder in der dem andern entsprechenden Ebene des Büschels liegt, so liegen die Gebilde involutorisch. Das gerade Gebilde enthält alsdann entweder gar keinen Punkt, welcher in der ihm entsprechenden Ebene des Büschels liegt, oder zwei solche Punkte, je nachdem nämlich der Winkel, welcher aus der Axe des Büschels die Strecke AA_1 projicirt, der Strecke A_1A oder der Strecke A_1A entspricht.

216. Ein involutorisches einförmiges Gebilde enthält entweder (215) gar kein Element, welches mit dem ihm zugeordneten Elemente zusammenfällt, oder zwei Elemente (Ordnungselemente), deren jedes sich selbst zugeordnet ist, je nachdem nämlich zwei einander zugeordnete Elemente durch zwei andere solche Elemente getrennt oder nicht getrennt sind. Im letztern Falle sind (118) die Ordnungselemente M, N durch je zwei einander zugeordnete Elemente P, P_1, da $MNPP_1 \pi MNP_1P$ ist, harmonisch getrennt.

217. Will man die Elemente eines einförmigen Grundgebildes

projektivisch paaren (das Gebilde als ein involutorisches betrachten), so kann man in ihm (nach 110 und 215) zwei Paare AA_1, BB_1 oder ein Paar AA_1 und ein Ordnungselement M, oder zwei Ordnungselemente nach Belieben annehmen, wodurch aber alsdann jedem Elemente P ein Element P_1 zugeordnet ist. Werden im letztern Falle die Elemente M, N durch zwei Elemente A, A_1 harmonich getrennt, so ist derselbe auf den vorletzten zurückgeführt.

218. Wenn von zwei zu einander projektivischen Gebilden $ABC\ldots., A_1B_1C_1\ldots$, deren jedes nur aus einzelnen Elementen besteht, gesagt wird, dass sie involutorisch liegen, so heisst diess nichts anderes, als dass sie homologe Gebilde von zwei involutorisch liegenden projektivischen Grundgebilden sind.

Ist nur von Elementen eines und desselben einförmigen Grundgebildes die Rede, so ist (215) die Aussage $ABC \barwedge A_1B_1C_1$ mit der Aussage $AA_1BC \barwedge A_1AB_1C_1$, die Aussage $MAB \barwedge MA_1B_1$ mit der Aussage $MAA_1B \barwedge MA_1AB_1$ und die Aussage $MNA \barwedge MNA_1$ mit der Aussage, dass $MANA_1$ ein harmonisches Gebilde ($\barwedge MA_1NA$) sey, ganz übereinstimmend. Ferner kann alsdann aus $ABC \barwedge A_1B_1C_1$ und $ABD \barwedge A_1B_1D_1$ auf $ABCD \barwedge A_1B_1C_1D_1$, aus $MAB \barwedge MA_1B_1$ und $MBC \barwedge MB_1C_1$ auf $MABC \barwedge MA_1B_1C_1$ und aus $MNA \barwedge MNA_1$ und $MNB \barwedge MNB_1$ auf $MNAB \barwedge MNA_1B_1$ geschlossen werden.

219. Der Inbegriff von drei oder auch mehr als drei Elementenpaaren eines involutorischen einförmigen Grundgebildes heisst eine Involution. Wenn also die einförmigen Gebilde AA_1BC, $A_1AB_1C_1$ zu einander projektivisch sind, so ist $AA_1.BB_1.CC_1$ eine Involution. Sind die einförmigen Gebilde MAA_1B, MA_1AB_1 zu einander projektivisch, so ist $M.AA_1.BB_1$ eine Involution, in welcher das Element M die Stelle eines Paares vertritt. Ist $MANA_1$ ein harmonisches Gebilde, so ist $M.N.AA_1$ eine Involution, in welcher jedes von den beiden Elementen M, N die Stelle eines Paares vertritt.

Durch zwei Elementenpaare einer Involution und ein Element eines dritten Paares ist auch das andere Element dieses Paares bestimmt. — Wenn von beliebig vielen Elementenpaaren eines einförmigen Gebildes das dritte mit den beiden ersten und jedes

folgende mit zwei vorhergehenden eine Involution bildet, so bilden (218) alle und also auch je drei eine Involution. — Jeder Involution in dem einen von zwei zu einander projektivischen Gebilden entspricht (103) eine Involution im andern, daher namentlich jede Involution von Punkten aus jedem ausserhalb der Geraden befindlichen Mittelpunkte durch eine Involution von Strahlen projicirt wird.

220. Sucht man zu den drei Elementen A, B, C eines einförmigen Grundgebildes in jeder Anordnung das vierte harmonische Element, so erhält man drei andere Elemente, zu welchen in jeder Anordnung eines der drei erstern das vierte harmonische Element ist. Auch können die sechs Elemente auf viererlei Art zu einer Involution gepaart werden.

Wenn nämlich $ABCB_1$, $BCAC_1$, $CABA_1$ harmonische Gebilde sind, so ist (117) $ABCB_1 \barwedge ACBC_1$ und folglich (219) $A.BC.B_1C_1$ eine Involution, daher die Elemente A, A_1, welche durch die Elemente B, C harmonisch getrennt sind, auch durch die Elemente B_1, C_1 harmonisch getrennt seyn müssen. Eben so wird bewiesen, dass $A_1B_1C_1B$, $B_1C_1A_1C$ harmonische Gebilde sind. Da hiernach $AA_1BC \barwedge A_1AB_1C_1 \barwedge A_1AC_1B_1$, so sind $AA_1.BB_1.CC_1$, $AA_1.BC_1.B_1C$ und eben so $BB_1.AC_1.A_1C$, $CC_1.AB_1.A_1B$ Involutionen.

221. Werden in einer Ebene ein gerades Gebilde u, ein Strahlenbüschel H und ein Dreieck EFG angenommen, von welchem kein Eckpunkt in der Geraden u liegt und keine Seite durch den Punkt H geht, und alsdann das gerade Gebilde u und der Strahlenbüschel H projektivisch so aufeinander bezogen, dass den drei Punkten A, B, C des erstern Gebildes, welche von den Seiten EF, FG, GE des Dreiecks die Spuren sind, die drei Strahlen HG, HE, HF des letztern entsprechen, welche die jenen Seiten gegenüberliegenden Eckpunkte projiciren, so liegen die beiden Gebilde, wenn die Gerade u nicht durch den Punkt H geht, involutorisch. Geht aber die Gerade u durch den Punkt H, so entspricht diesem Punkte des geraden Gebildes der Strahl u des Strahlenbüschels. — Es schneide der Strahl HG die Gerade u im Punkte A_1 und die Gerade EF im Punkte K. Da nun der Strahlenbüschel H(GEFA) dem geraden Gebilde KEFA, also

auch dem geraden Gebilde A_1CBA, welches vom erstern eine Projektion aus dem Punkte G ist, mithin auch (119) dem geraden Gebilde $ABCA_1$ projektivisch ist, so entspricht dem Punkte A_1 des geraden Gebildes u der Strahl HA des Büschels H, woraus (215) der Satz folgt.

Anm. Der Begriff n Eck wird in diesem § wieder in der Bedeutung von 79 genommen.

222. Die Seiten eines vollständigen ebenen Vierecks EFGH werden (221) von einer jeden Geraden, welche mit ihm in einerlei Ebene liegt, aber durch keinen seiner Eckpunkte geht, in einer Involution, nämlich je zwei Gegenseiten in zwei einander zugeordneten Punkten geschnitten.

Die Eckpunkte eines vollständigen Vierseits werden aus jedem Punkte, welcher mit ihm in einerlei Ebene, aber in keiner seiner Seiten liegt, durch eine Involution, nämlich je zwei Gegenpunkte durch zwei einander zugeordnete Strahlen projicirt.

Wenn also zwei Vierecke aufeinander bezogen sind, und eine Gerade, welche durch keinen Eckpunkt derselben geht, von den vier Seiten und einer Diagonale des einen in denselben Punkten geschnitten wird, in welchen die homologen Seiten und irgend eine Diagonale des andern sich schneiden, so wird sie auch von den beiden übrigen Diagonalen in einem und demselben Punkte geschnitten. Ein besonderer Fall von diesem Satze heisst:

Wenn zu den vier Seiten eines Vierecks die vier Seiten eines andern der Ordnung nach parallel sind, und überdiess zu einer Diagonale des erstern irgend eine Diagonale des letztern parallel ist, so sind auch die beiden übrigen Diagonalen zu einander parallel.

223. Sind zwei Punkte M, N durch je zwei Gegenseiten eines Vierecks harmonisch getrennt, so sind sie entweder auch durch die beiden Diagonalen harmonisch getrent, oder sie liegen

Sind zwei Gerade durch je zwei Gegenpunkte eines Vierecks harmonisch getrennt, so sind sie entweder auch durch die beiden Punkte, in deren jedem ein Paar Gegenseiten sich

in einer und derselben Diagonale. Folgt aus 219 und 222.

Wenn daher je zwei Gegenseiten eines vollständigen Vierecks durch zwei andere Gerade harmonisch getrennt werden, und von diesen sechs andern Geraden drei in einem und demselben Punkte M sich schneiden, so gehen auch die drei übrigen durch einen und denselben Punkt N.

224. Durch zwei projektivische gerade Gebilde s, s_1, welche in einerlei Ebene, aber nicht in einer und derselben Geraden liegen, ist eine Gerade v bestimmt, welche nämlich, wenn das eine von den beiden geraden Gebilden aus einem beliebigen Punkte des andern nnd das andere aus dem homologen Punkte des erstern projicirt wird, von je zwei homologen Strahlen der zu einander projektivischen Strahlenbüschel in einem und demselben Punkte geschnitten wird.

schneiden, harmonisch getrennt, oder sie schneiden sich selbst in einem dieser Punkte.

Wenn daher je zwei Gegenpunkte eines vollständigen Vierseits durch zwei andere Punkte harmonisch getrennt werden, und von diesen sechs andern Punkten drei in einer und derselben Geraden liegen, so liegen auch die drei übrigen in einer und derselben Geraden.

Durch zwei projektivische Strahlenbüschel S, S_1, welche in einerlei Ebene liegen, aber nicht concentrisch sind, ist ein Punkt V bestimmt, welcher nämlich, wenn der eine von den beiden Büscheln von einem beliebigen Strahle des andern und der andere von dem homologen Strahle des erstern geschnitten wird, mit je zwei homologen Punkten der zu einander projektivischen Schnitte in einer und derselben Geraden liegt.

Es entspreche der Schnittpunkt P_1, der Geraden s, s_1 als Punkt der letztern dem Punkte P der erstern und dem Punkte P_1 der erstern der Punkt P_2 der letztern. Ferner seyen A, B irgend zwei andere Punkte der Geraden s und A_1, B_1 die homologen Punkte der Geraden s_1, so sind (108) die beiden Strahlenbüschel, von welchen der eine das gerade Gebilde s aus dem Punkte A_1 und der andere das gerade Gebilde s_1 aus dem Punkte A projicirt, Scheine eines und desselben geraden Gebildes v und eben so die beiden Strahlenbüschel, von welchen der eine das

gerade Gebilde s aus dem Punkte B_1 und der andere das gerade Gebilde s_1 aus dem Punkte B projicirt, Scheine eines und desselben geraden Gebildes w. Dass aber, was nur noch zu beweisen ist, die Geraden v, w in einanderfallen, geht daraus hervor, weil beide sowohl durch den Schnittpunkt N von AB_1 und A_1B als auch durch die Punkte P, P_2 gehen, welche übrigens, wenn die Gebilde s, s_1 Schnitte eines und desselben Strahlenbüschels M sind, mit dem Punkte P_1 zusammenfallen. In diesem Falle ist die Gerade v von der Geraden PM durch die Geraden s, s_1 harmonisch getrennt. — Liegen die Büschel S, S_1 nicht perspektivisch, so ist der Punkt V der Schnittpunkt der beiden Strahlen, welche dem gemeinschaftlichen Strahle p_1 derselben entsprechen. Sind aber die Büschel S, S_1 Scheine eines und desselben geraden Gebildes u, so ist der Punkt V zu den Punkten S, up_1, S_1 der vierte harmonische Punkt.

Da aus dem Punkte N die Punkte A, B durch die Strahlen NA, NB, die Punkte A_1, B_1 aber durch die Strahlen NB, NA projicirt werden, so folgt noch:

Die geraden Gebilden s, s_1 werden aus jedem Punkte, welcher in der Geraden v aber in keiner von den beiden erstern Geraden liegt, durch zwei involutorisch liegende Strahlenbüschel projicirt.

Die Strahlenbüschel S, S_1 werden von jeder Geraden, welche durch den Punkt V, aber durch keinen von den Punkten S, S_1 geht, in zwei involutorisch liegenden geraden Gebilden geschnitten.

225. Wenn von einem Sechsecke $AB_1C\ A_1BC_1$ je drei Eckpunkte, unter welchen keine zwei aufeinanderfolgende sind, in einer und derselben Geraden liegen, so liegen auch die drei Punkte, in deren jedem ein Paar Gegenseiten sich schneiden, in einer und derselben Geraden. Aus jedem vierten Punkte, welcher in dieser Geraden, aber in keiner von den beiden erstern

Wenn von einem Sechsecke je drei Seiten, unter welche keine zwei aufeinanderfolgende sind, in einem und demselben Punkte sich schneiden, so schneiden sich auch die drei Diagonalen, deren jede ein Paar Gegenpunkte verbindet, in einem und demselben Punkte. Jede vierte Gerade, welche durch diesen Punkt, aber durch keinen von den beiden erstern Schnittpunkten geht,

liegt, werden die drei Paar Gegenpunkte des Sechsecks durch eine Involution von drei Paar Strahlen projicirt.

schneidet die drei Paar Gegenseiten des Sechsecks in einer Involution von drei Paar Punkten.

Es folgen diese Sätze aus den vorigen, wenn man bemerkt, dass zwei einförmige Gebilde projektivisch so aufeinander bezogen werden können, dass drei gegebenen Elementen A, B, C des einen drei gegebene Elemente A_1, B_1, C_1 des andern entsprechen. Die erstern Theile der obigen Sätze können auch in folgenden zusammengefasst werden:

Wenn die Dreiecke FF_1F_2, GG_1G_2 perspektivisch liegen, und dasselbe von den Dreiecken FF_1F_2, G_1G_2G gilt, so gilt es auch von den Dreiecken FF_1F_2, G_2GG_1.

---

§. 17.

Involutorische Systeme.

226. Wird von zwei ebenen Systemen oder von zwei Strahlenbündeln oder von zwei räumlichen Systemen, welche projektivisch sind und überdiess involutorisch liegen, nur wie von einem Systeme gesprochen, so soll dieses, wenn die Systeme collineär sind, ein involutorisches System, im entgegengesetzten Falle aber ein Polarsystem genannt werden. Der Inbegriff von zwei einander zugeordneten Gebilden G, G_1 eines involutorischen Systems ist ein involutorisches Gebilde GG_1.

227. In zwei collineären ebenen Systemen, welche involutorisch liegen, ist durch je zwei einander entsprechende Elemente A, A_1 ein Element AA_1 bestimmt, welches sich selbst (dem Elemente A_1A) entspricht, daher die beiden Systeme unendlich viele Elemente entsprechend gemein haben und mithin auch perspektivisch liegen. Und wenn zwei collineäre ebene Systeme einen Strahlenbüschel S und also auch ein gerades Gebilde u entsprechend gemein haben, und irgend zwei Punkte A, A_1 einander doppelt entsprechen, nämlich durch den Punkt S und einen Punkt R der Geraden u harmonisch getrennt sind, so gilt diess (136)

von je zwei homologen Punkten, daher die Systeme auch involutorisch liegen.

Will man ein ebenes System als ein involutorisches betrachten, so darf man nur in der Ebene eine Gerade u als Ordnungslinie und einen ausserhalb dieser Linie befindlichen Punkt S als Ordnungspunkt annehmen und alsdann in jeder Geraden, welche durch den Ordnungspunkt geht, den Punkt, in welchem sie die Ordnungslinie schneidet, als den andern Ordnungspunkt, in jedem Strahlenbüschel aber, dessen Mittelpunkt in der Ordnungslinie liegt, den Strahl, welcher durch den Ordnungspunkt geht, als den andern Ordnungsstrahl betrachten.

228. Jede Curve SAT, welche den Ordnungspunkt S eines involutorischen ebenen Systems mit einem Punkte T der Ordnungslinie u verbindet, bildet mit der ihr zugeordneten Curve SA_1T eine involutorische Curve unparer Ordnung, in welcher der Punkt S ein gewöhnlicher Wendepunkt, der Punkt T aber ein gewöhnlicher Punkt oder ein gewöhnlicher Rückkehrpunkt oder ein Eckpunkt ist, je nachdem in diesem Punkte der Curve SAT die Gerade TS oder die Gerade u oder eine dritte Gerade sich anschmiegt. Die Gerade u bildet nämlich mit jeder durch den Punkt S gehenden Geraden zwei einander zugeordnete Winkel, daher die involutorische Curve im Punkt S von jeder durch ihn gehenden Geraden geschnitten, im Punkte T hingegen von der Geraden ST berührt, von der Geraden u aber geschnitten wird. Schneidet eine durch den Punkt S gehende Gerade die Curve in dem einen von zwei einander zugeordneten Punkten, so schneidet sie dieselbe auch im andern, daher die Anzahl der von S verschiedenen Schnittpunkte eine pare Zahl ist.

Jede Linie TAU, welche von zwei Punkten der Ordnungslinie begrenzt ist, bildet mit der ihr zugeordneten Linie TA_1U eine involutorische Linie parer Ordnung, welche, wenn sie nicht öfter als einmal durch einen und denselben Punkt geht, der Umfang einer involutorischen Figur ist, die durch das in ihr liegende Stück der Ordnungslinie in zwei einander zugeordnete Theile getheilt wird. Der Ordnungspunkt S liegt ausserhalb der Figur.

Jede Linie ABA_1, welche von zwei einander zugeordneten Punkten begrenzt ist, bildet mit der ihr zugeordneten Linie A_1B_1A

eine geschlossene Linie parer Ordnung, welche, wenn sie durch keinen Punkt öfter als einmal geht (also auch mit der Ordnungslinie keinen Punkt gemein hat), der Umfang einer involutorischen Figur ist, die den Ordnungspunkt S in sich enthält. Eine solche involutorische Figur wird durch jede in ihr liegende, zwei Punkte ihres Umfangs verbindende Linie $A S A_1$, welche nicht öfter als einmal durch einen und denselben Punkt geht und aus zwei einander zugeordneten Linien SA, SA_1 zusammengesetzt ist, in zwei einander zugeordnete Theile getheilt. In zwei collineären Systemen entsprechen einander nämlich zwei Figuren, wenn der Umfang der einen dem Umfange der andern entspricht.

229. Wenn in zwei collineären Systemen, welche einen Strahlenbündel S und also auch ein ebenes System U entsprechend gemein haben, irgend zwei Punkte A, A_1 einander doppelt entsprechen, und also durch den Punkt S und einen Punkt R der Ebene U harmonisch getrennt sind, so gilt diess (136) von je zwei homologen Punkten, daher die Systeme involutorisch liegen. In jeder Ebene, welche durch den Ordnungspunkt S eines solchen involutorischen Systems geht, erscheint die Spur der Ordnungsebene als Ordnungslinie, in jedem Strahlenbündel aber, welchem die Ordnungsebene angehört, der Strahl, welcher den Ordnungspunkt projicirt, als Ordnungsstrahl. Die Ordnungsebene bildet mit jeder durch den Ordnungspunkt gehenden Ebene zwei einander zugeordnete Winkel.

Jede gewundene Curve, welche den Punkt S mit einem Punkte T der Ebene U verbindet, bildet mit der ihr zugeordneten Curve eine involutorische Curve unparer Ordnung, welche im erstern Punkte von jeder durch ihn gehenden Ebene geschnitten, im letztern aber von der Ebene U geschnitten und von jeder durch die Gerade ST gehenden Ebene berührt wird. Jede Linie, welche von zwei Punkten der Ebene U oder von zwei einander zugeordneten Punkten begrenzt ist, bildet mit der ihr zugeordneten Linie eine involutorische Linie parer Ordnung.

Wenn ein involutorischer Körper, welcher einem involutorischen Systeme der obigen Art angehört, durch ein Stück der Ordnungsfläche in zwei einander zugeordnete Theile getheilt wird, so liegt (184) der Ordnungspunkt ausserhalb desselben. Wenn

hingegen der Körper den Ordnungspunkt in sich enthält, so hat seine Oberfläche mit der Ordnungsfläche keinen Punkt gemein. Im letztern Falle giebt es unendlich viele durch jenen Punkt gehende Flächen, deren jede den Körper in zwei einander zugeordnete Theile theilt.

230. Sollen zwei räumliche Systeme collineär so aufeinander bezogen werden, dass sie zwei nicht in einerlei Ebene liegende gerade Gebilde s, u und also auch die Ebenenbüschel s, u entsprechend gemein haben, so kann man noch in einer Geraden MN, welche einen Punkt M der Geraden s mit einem Punkte N der Geraden u verbindet, zu einem dritten Punkte A des einen Systems den homologen Punkt A_1 des andern nach Belieben annehmen. Wenn nämlich G, J noch zwei Punkte der Geraden s und H, K noch zwei Punkte der Geraden u sind und die Systeme projektivisch so auf einander bezogen werden, dass den Punkten G, H, J, K, A des einen die Punkte G, H, J, K, A_1 des andern entsprechen, so haben sie auch den Punkt M, in welchem die Gerade GJ von der Ebene HKA (oder HKA_1) geschnitten wird, mithin (122) das gerade Gebilde s und eben so das gerade Gebilde u entsprechend gemein, daher auch je zwei homologe ebene Systeme, welche in einer durch die Gerade s oder durch die Gerade u gehenden Ebene liegen, zu einander perspektivisch sind.

Da es durch jeden Punkt und in jeder Ebene eine Gerade giebt, welche die Geraden s, u schneidet, und also sich selbst entspricht, so muss auch jede Gerade, welche zwei homologe Punkte verbindet oder die Schnittlinie von zwei homologen Ebenen ist, die Geraden s, u schneiden. Jedes gerade Gebilde $MNAA_1$, welches aus einem Punkte der Geraden s, einem Punkte der Geraden u und zwei homologen Punkten besteht, ist jedem andern solchen geraden Gebilde $GHCC_1$ projektivisch. Sind nämlich B, B_1 zwei homologe Punkte der Geraden MH, so ist (136) $MNAA_1 \barwedge MHBB_1 \barwedge GHCC_1$.

Die Systeme können einstimmig- oder entgegengesetzt-projektivisch genannt werden, je nachdem die Punkte M, N durch die Punkte A, A_1 nicht getrennt oder getrennt sind. Im letztern Falle entspricht jede Strecke, welche einen Punkt der Geraden s mit einem

Punkte der Geraden u verbindet, ihrer Ergänzung, und jeder Flächenwinkel, welchen eine Ebene des Büschels s mit einer Ebene des Büschels u bildet, seinem Nebenwinkel.

231. Wenn in zwei collineären Systemen, welche zwei nicht in einerlei Ebene liegende gerade Gebilde s, u entsprechend gemein haben, irgend zwei homologe Punkte einander doppelt entsprechen und also durch einen Punkt der Geraden s und einen Punkt der Geraden u harmonisch getrennt sind, so gilt diess (230) von je zwei homologen Punkten, daher die Systeme involutorisch liegen. In jeder Ebene, welche durch die eine von den beiden Ordnungslinien s, u eines solchen involutorischen Systems geht, erscheint die Spur der andern als Ordnungspunkt, in jedem Strahlenbündel aber, welchem eine von den beiden Ordnunglinien angehört, die Ebene, welche die andere projicirt, als Ordnungsebene.

Jede gewundene Curve, welche einen Punkt M der Geraden s mit einem Punkte N der Geraden u verbindet, bildet mit der ihr zugeordneten Curve eine involutorische Curve unparer Ordnung, welche im Punkte M von jeder Ebene des Büschels s geschnitten, von der Ebene Mu aber berührt wird. Ist eine Linie von zwei Punkten einer und derselben Ordnungslinie oder von zwei einander zugeordneten Punkten begrenzt, so bildet sie mit der ihr zugeordneten Linie eine involutorische Linie parer Ordnung.

In jedem involutorischen Körper, welcher einem involutorischen Systeme der obigen Art angehört, sind unendlich viele Flächen enthalten, deren jede den Körper in zwei einander zugeordnete Theile theilt und durch das in ihm liegende Stück der einen Ordnungslinie in zwei einander zugeordnete Theile getheilt wird.

232. Will man zwei räumliche Systeme collineär so aufeinander beziehen, dass sie involutorisch aber nicht perspektivisch liegen, so darf man nur zwei nicht concentrische Strahlenbündel A, A_1 projektivisch so auf einander beziehen, dass zwei Ebenen, welche durch die Gerade AA_1 gehen, einander doppelt entsprechen, und alsdann die Strahlenbündel A, A_1 selbst als zwei einander doppelt entsprechende Gebilde der räumlichen Systeme betrachten. Jedem Punkts P, in welchem ein Strahl AP des Bün-

dels A und ein Strahl A_1P des Bündels A_1 sich schneiden, ist ein Punkt P_1 zugeordnet, in welchem die den beiden erstern Strahlen entsprechenden Strahlen A_1P_1, AP_1 der Bündel A_1, A sich schneiden.

Enthält der involutorische Ebenenbüschel, dessen Axe die Gerade AA_1 ist, zwei Ebenen, deren jede sich selbst zugeordnet ist, so enthält (227) jede dieser Ebenen eine Ordnungslinie und also das involutorische System zwei Ordnungslinien. Enthält aber der erwähnte Ebenenbüschel keine Ebene, welche sich selbst zugeordnet ist, so enthält das involutorische System weder eine sich selbst zugeordnete Ebene noch einen sich selbst zugeordneten Punkt. Wäre nämlich eine Ebene, welche die Gerade AA_1 schneidet, sich selbst zugeordnet, so würde diess auch von jeder Ebene gelten, welche aus der Axe AA_1 einen sich selbst zugeordneten Punkt der erstern Ebene projicirt. Wäre ein Punkt M sich selbst zugeordnet, so würde diess auch von jeder Ebene gelten, welche durch zwei einander zugeordnete Strahlen des Strahlenbündels M bestimmt ist.

233. In einem involutorischen Systeme, in welchem kein Punkt und also auch keine Ebene sich selbst zugeordnet ist, ist jede Strecke ihrer Ergänzung und jeder Flächenwinkel seinem Nebenwinkel zugeordnet. Jede Linie ABA_1, welche zwei einander zugeordnete Punkte verbindet, bildet mit der ihr zugeordneten Linie A_1B_1A eine involutorische Linie unparer Ordnung.

Wird nämlich die Linie ABA_1 von einer Ebene V, welche weder durch den Punkt A noch durch den Punkt A_1 geht, in m Punkten und von der der erstern zugeordneten Ebene V_1 in n Punkten geschnitten, so muss, weil der eine von den beiden Punkten A, A_1 in dem Winkel VV_1 und der andere in dem Winkel $V \cdot V_1$ liegt, $m+n$ eine unpare Zahl seyn. Bemerkt man nun, dass jedem Punkte, in welchem die Linie ABA_1 von der Ebene V_1 geschnitten wird, ein Punkt zugeordnet ist, in welchem die Linie A_1B_1A von der Ebene V geschnitten wird, so folgt, dass auch die Anzahl der Punkte, in welchen die erwähnte involutorische Linie und die Ebene V sich schneiden, eine unpare Zahl nämlich $= m + n$ sey.

Verbindet man in einem involutorischen Körper zwei einander

zugeordnete Punkte durch eine Linie, so bildet diese mit der ihr zugeordneten Linie eine geschlossene Linie, welche ganz in dem Körper liegt und also von parer Ordnung ist. Da nun ein involutorisches System der obigen Art keine solche Linie enthält, so enthält es auch keinen involutorischen Körper.

---

§. 18.

Polarsystem in der Ebene und im Strahlenbündel.

234. Wenn zwei reciproke Systeme in einerlei Ebene liegen, und den Eckpunkten irgend eines Dreiecks ABC die ihnen gegenüberliegenden Seiten entsprechen, so liegen die Systeme involutorisch.

Entsprechen nämlich den Punkten A, B, C des einen Systems die Geraden BC, AC, AB des andern, so entsprechen auch den Geraden BC, AC, AB des erstern Systems die Punkte A, B, C des letztern. Wenn ferner der Geraden AP des einen Systems, welche den Eckpunkt A mit dem Punkte P der Seite BC verbindet, der Punkt P_1 des andern entspricht, so entspricht auch (215) der Geraden AP_1 des erstern Systems der Punkt P des letztern und folglich auch dem Punkte P_1 des erstern die Gerade AP des letztern. Da hiernach je zwei homologe Elemente, von welchen das eine durch einen Eckpunkt des Dreiecks ABC geht, und also das andere in der diesem Eckpunkte gegenüberliegenden Seite liegt, einander doppelt entsprechen, so gilt diess auch von jedem Punkte, in welchem ein Strahl des Büschel A von einem Strahle des Büschels B geschnitten wird, und der Geraden, welche die jenen Strahlen entsprechenden Punkte verbindet.

235. In einem ebenen Polarsysteme heisst jeder Punkt der Pol der ihm zugeordneten Geraden und jede Gerade die Polare des ihr zugeordneten Punktes, so dass also die Pole von allen Geraden, welche in einem und demselben Punkte sich schneiden, in der Polare dieses Punktes liegen und die Polaren von allen Punkten, welche einer und derselben Geraden angehören, in dem Pole dieser Geraden sich schneiden. Liegt ein Punkt in seiner

Polare, so liegt jeder andere Punkt dieser Geraden ausserhalb seiner Polare.

Jedes gerade Gebilde P, welches nicht durch seinen Pol P_1 geht, liegt (215) mit dem ihm zugeordneten Strahlenbüschel P_1 involutorisch. Wenn nämlich der Punkt A der Geraden P der Pol der Geraden P_1A_1 ist, so ist auch der Punkt A_1, in welchem diese Gerade von der Geraden P geschnitten wird, der Pol der Geraden P_1A. Die Gerade P enthält entweder gar keinen Punkt, welcher in seiner Polare liegt, oder zwei solche Punkte, je nachdem der Winkel, welcher aus dem Punkte P_1 die Strecke AA_1 projicirt, der Strecke $A_1 \cdot A$ oder der Strecke A_1A zugeordnet ist.

Um noch, was hier vorausgesetzt wurde, zu beweisen, dass nämlich nicht jeder Punkt der Geraden P in seiner Polare liege, nehme man an, dass die Punkte A, B der Geraden P die Pole der Geraden P_1A, P_1B sind. Wenn nun dem Punkte G der Geraden P_1A die Gerade AH zugeordnet ist, so ist auch dem Punkte H, in welchem diese Gerade von der Geraden BP_1 geschnitten wird, die Gerade BG, folglich der Geraden GH der Schnittpunkt Q von AH und BG und mithin dem Schnittpunkte C von P und GH die Gerade P_1Q zugeordnet, deren Spur in der Geraden P vom Punkte C durch die Punkte A, B harmonisch getrennt ist.

Liegt ein Punkt P_1 in seiner Polare P, so giebt es nach dem Obigen in jeder andern Geraden, welche durch den Punkt P_1 geht, noch einen Punkt, welcher in seiner Polare liegt, und eben so in jedem Strahlenbüschel, dessen Mittelpunkt ein von P_1 verschiedener Punkt der Geraden P ist, noch eine Gerade, welche durch ihren Pol geht.

236. In einem ebenen Polarsysteme sind unendlich viele (absolute) Polardreiecke enthalten.

Nimmt man nämlich in einer Geraden, welche nicht durch ihren Pol A geht, einen Punkt B an, dessen Polare die Gerade in einem andern Punkte C schneidet, so ist jeder Eckpunkt des Dreiecks ABC der Pol der ihm gegenüberliegenden Seite, daher dasselbe ein Polardreieck heisst.

Sind den Eckpunkten eines Dreiecks die Seiten eines andern und also den Seiten des erstern die Eckpunkte des letztern zu-

geordnet, so heissen die Dreiecke Polardreiecke zu einander (relative Polardreiecke).

237. Wenn in einer Ebene ein Dreieck ABC als Polardreieck angenommen und alsdann noch einem Punkte P, welcher in keiner Seite des Dreiecks liegt, eine Gerade P_1, welche durch keinen Eckpunkt desselben geht, zugeordnet wird, so ist dadurch ein Polarsystem bestimmt. Folgt aus 130 und 234.

Versteht man unter einem Dreiecke eine von drei Strecken begrenzte Figur, so sind die Punkte A, B, C die Eckpunkte von vier Dreiecken, von welchen das eine ABC den Punkt P in sich enthält. Wenn nun der Umfang dieses Dreiecks von der Geraden P_1 nicht geschnitten wird, so ist offenbar jedem der vier Dreiecke das von seinem Umfange ausgeschlossene System von Geraden zugeordnet, daher alsdann kein Punkt der Ebene in seiner Polare liegt. Wenn aber die Gerade P_1 die Seiten AB, AC des Dreiecks ABC schneidet, so ist jedes von den beiden Dreiecken ABC, BC·A und eben so jedes von den beiden Dreiecken AB·C, AC·B dem vom Umfange des andern ausgeschlossenen Systeme von Geraden zugeordnet. In diesem Falle enthält jede Strecke AH, welche den Punkt A mit einem Punkte der Geraden BC verbindet, einen Punkt, welcher in seiner Polare liegt, und jeder Winkel, welchen die Gerade BC mit einer durch den Punkt A gehenden Geraden bildet, welcher also einer in ihm liegenden Strecke AH zugeordnet ist, eine Gerade, welche durch ihren Pol geht.

238. Durch jedes ebene Fünfeck ABCDE ist ein Polarsystem bestimmt, in welchem nämlich jeder Eckpunkt des Fünfecks der Pol der ihm gegenüberliegenden Seite ist.

Es sey F der Schnittpunkt von AB und CD. Wenn man nun das Dreieck ADF als Polardreieck und den Punkt E als Pol der Geraden BC annimmt, so sind den Punkten B, C, in welchen diese Gerade von den Geraden AF, DF geschnitten wird, die Geraden ED, EA zugeordnet, welche den Punkt E mit den Punkten D, A verbinden.

239. Wenn der eine von zwei Punkten eines ebenen Polarsystems in der Polare des andern und also auch der andere in Polare des erstern liegt, so heissen sowohl die beiden Punkte als

auch die beiden Geraden, deren jede durch den Pol der andern geht, einander conjugirt. Liegt ein Punkt in seiner Polare, so kann man von jedem dieser Elemente sagen, dass es auch sich selbst conjugirt sey. Es ist hiernach jeder Punkt allen Punkten, welche in seiner Polare liegen, und jede Gerade allen Geraden, welche durch ihren Pol gehen, conjugirt. Sind zwei Punkte einem und demselben Punkte conjugirt, so ist dieser der Pol der durch die beiden erstern Punkte bestimmten Geraden. Sind zwei Gerade einer und derselben Geraden conjugirt, so ist diese die Polare des durch die beiden erstern Geraden bestimmten Punktes.

Jede Gerade P, welche nicht durch ihren Pol P_1 geht, ist (235) der Träger eines involutorischen geraden Gebildes, jeder Punkt P_1, welcher ausserhalb seiner Polare P liegt, der Mittelpunkt eines involutorischen Strahlenbüschels, in welchem je zwei in Hinsicht auf das Polarsystem conjugirte Elemente einander zugeordnet sind.

240. Wenn ein gerades Gebilde h und ein Strahlenbüschel H, welche zu einander projektivisch sind, entweder involutorisch liegen, oder die Gerade h durch den Punkt H geht und diesem Punkte des geraden Gebildes der Strahl h des Büschels entspricht, so können die Gebilde als zwei einander zugeordnete Gebilde eines und desselben Polarsystems betrachtet werden. Man hat nur noch, damit das Polarsystem bestimmt sey, zu einem von H verschiedenen, ausserhalb der Geraden h befindlichen Punkte V eine nicht durch den Punkt H gehende Gerade v, welche die Gerade u in dem Pole B der Geraden HV schneidet, als Polare anzunehmen.

Es seyen im erstern Falle A, A_1 zwei von B verschiedene Punkte der Geraden u, deren jeder in der Polare des andern liegt, so ist durch das Polardreieck HAA_1 und die einander zugeordneten Elemente V, v ein Polarsystem bestimmt, in welchem den Punkten A, A_1, B die Geraden HA_1, HA, HV zugeordnet sind. — Es sey im letztern Falle, in welchem nicht nur der Punkt B sondern auch der Punkt H in der Geraden h liegt, C ein dritter Punkt dieser Geraden, welchem der Strahl c des Büschels H entspreche. Bezieht man nun das gerade Gebilde c und den Strahlenbüschel C projektivisch so aufeinander, dass sie in-

volntorisch liegen und den Punkten H, cv die Strahlen h, CV entsprechen, so ist durch sie und die einander zugeordneten Elemente B, HV nach dem erstern Falle ein Polarsystem bestimmt, in welchem die Punkte H, B, C, V die Pole der Geraden h, HV, c, v sind.

Soll der Punkt V in seiner Polare v liegen, so ist durch das eine von diesen beiden Elementen auch das andere bestimmt. Nur darf alsdann, wenn etwa zwei Punkte M, N des geraden Gebildes h von den ihnen entsprechenden Strahlen HM, HN des Büschels H die Spuren sind, der Punkt V in keinem dieser Strahlen liegen.

241. Durch zwei Dreiecke EFG, efg, welche weder einen Eckpunkt noch eine Seite mit einander gemein haben, aber in einerlei Ebene und überdiess perspektivisch liegen, ist ein Polarsystem bestimmt, in welchem nämlich die beiden Dreiecke Polardreiecke zu einander (den Eckpunkten eines jeden die ihnen gegenüberliegenden Seiten des andern zugeordnet) sind.

Nach der Annahme schneiden sich die drei Geraden Ee, Ff, Gg in einem Punkte H, während die drei Punkte B, C, A, in welchen die Seiten FG, GE, EF des einen Dreiecks von den homologen Seiten fg, ge, ef des andern geschnitten werden, in einer Geraden h liegen. Wenn nun das gerade Gebilde h und der Strahlenbüschel H projektivisch so aufeinander bezogen werden, dass den Punkten B, C, A die Strahlen HE, HF, HG entsprechen und dem Punkte E die Gerade fg zugeordnet wird, so hat man nach 221 und 240 ein Polarsystem, in welchem der Geraden EA der Schnittpunkt g von fg und HG, folglich dem Schnittpunkte F von EA und HF die Gerade gC oder ge und eben so dem Punkte G die Gerade ef zugeordnet ist.

Die zehn Punkte und die zehn Geraden, welche hier in Betrachtung kommen, sind die Eckpunkte und Seiten von zehn Paar relativen Polardreiecken und zugleich die Eckpunkte und Seiten von fünf vollständigen Vierecken und den ihnen zugeordneten vollständigen Vierseiten.

242. In jedem ebenen Polarsysteme liegt jedes Dreieck EFG, von dessen sechs Elementen keine zwei einander conjugirt sind, sind, mit seinem Polardreiecke efg perspektivisch.

Würde nämlich die Gerade HG, welche den Schnittpunkt H von Ee und Ff mit dem Punkte G verbindet, die Gerade fg in einem von g verschiedenen Punkte g_1 schneiden, so gäbe es (241) ein vom erstern Polarsysteme verschiedenes Polarsystem, in welchem den Geraden ef, fg, EG, FG, Ee dieselben Punkte zugeordnet wären, welche ihnen im erstern zugeordnet sind, was (130) nicht möglich ist.

243. Wenn ein Dreieck EFG und ein Polarsystem in einerlei Ebene liegen, aber kein Eckpunkt des Dreiecks der Pol der ihm gegenüberliegenden Seite ist, so schneiden sich die drei Geraden Ee, Ff, Gg, welche die Eckpunkte des Dreiecks mit den Polen der ihnen gegenüberliegenden Seiten verbinden, in einem und demselben Punkte H, während die Punkte, in welchen die Seiten des Dreiecks von den Polaren der ihnen gegenüberliegenden Eckpunkte geschnitten werden, in einer und derselben Geraden h (der Polare jenes Schnittpunktes) liegen.

Sind die Seiten EF, EG des Dreiecks EFG einander conjugirt, so dass also der Punkt f in der Geraden EF und der Punkt g in der Geraden EG liegt, so fällt der Punkt H mit dem Punkte E und die Gerade h mit der Geraden fg zusammen. Sind die Eckpunkte F, G des Dreiecks EFG einander conjugirt, so fällt der Punkt H mit dem Punkte e und die Gerade h mit der Geraden FG zusammen. Ist keines von den sechs Elementen des Dreiecks EFG einem andern conjugirt, so liegen die Dreiecke EFG, efg perspektivisch. 242.

244. Sind in einem Vierecke EFGH, welches in der Ebene eines Polarsystems liegt,

je zwei Gegenseiten einander conjugirt, so sind es auch (243) die beiden Diagonalen.

je zwei Gegenpunkte einander conjugirt, so sind es auch die beiden Punkte, in deren jedem ein Paar Gegenseiten sich schneiden.

245. Jedes ebene Polarsystem wird aus jedem ausserhalb der Ebene befindlichen Punkte durch ein Polarsystem im Strahlenbündel projicirt, so dass je zwei einander zugeordnete Elemente A, A_1 des ebenen Systems von zwei einander zugeordneten Elementen a, a_1 des Strahlenbündels die Spuren sind. Werden je zwei ein-

ander zugeordnete Elemente des einen Systems mit einander vertauscht, so dass alsdann den Elementen A, A_1 die Elemente a_1, a entsprechen, so sind die beiden Systeme zu einander reciprok und involutorisch liegend. Und wenn ein ebenes System und ein Strahlenbündel zu einander reciprok sind und involutorisch liegen, so erscheint die Ebene als Träger eines Polarsystems, in welchem jedes von zwei einander zugeordneten Elementen durch das dem andern entsprechende Element des Strahlenbündels projicirt wird.

---

§. 19.

Curven und Kegelflächen II. Ordnung.

246. In einem ebenen Polarsysteme giebt es (nach 235 und 236) entweder gar kein Element, welches sich selbst conjugirt ist, oder es giebt eine Curve s parer Ordnung, welche dem ihr sich anschmiegenden Strahlenbüschel zugeordnet ist, so dass nämlich jeder Punkt, welcher der Curve angehört, in seiner Polare liegt, die in ihm der Curve sich anschmiegt, jeder Punkt aber, welcher jener Curve (der Ordnungscurve des Polarsystems) nicht angehört, ausserhalb seiner Polare liegt. Die Curve hat mit keiner Geraden mehr als zwei Punkte gemein und wird in jedem in ihr befindlichen Punkte von der Polare dieses Punktes berührt, von jeder andern durch denselben Punkt gehenden Geraden aber in ihm und in noch einem Punkte geschnitten.

Das von der Curve s eingeschlossene System F von Punkten ist dem von ihr ausgeschlossenen Systeme von Geraden zugeordnet. Von jedem Polardreiecke enthält die Figur F einen Eckpunkt; die ihm gegenüberliegende Seite hat mit der Curve s keinen Punkt gemein. Jedem geraden Gebilde V, welches die Curve s in zwei Punkten A, B schneidet, ist ein Strahlenbüschel V zugeordnet, welches mit dem Strahlenbüschel s zwei Strahlen A, B gemein hat. Durch diese Strahlen sind je zwei conjugirte Strahlen des Büschels V, durch jene Punkte je zwei conjugirte Punkte des geraden Gebildes V harmonisch getrennt.

247. Jede geschlossene $\left\{\begin{matrix}\text{ebene Curve}\\ \text{Kegelfläche}\end{matrix}\right\}$, welche die Ordnungs-

{curve / fläche} eines Polarsystems oder, was dasselbe ist, dem ihr sich anschmiegenden Büschel projektivisch ist, so dass jedem {Punkte der Curve / Strahle der Fläche} das ihr in demselben sich anschmiegende Element des Büschels entspricht, heisst eine {Kegelfläche / Curve} zweiter Ordnung.

Entspricht der geschlossenen Curve s in dem einen von zwei reciproken ebenen Systemen der Strahlenbüschel s des andern, so dass den Punkten A, B, C, D u. s. w. der Curve die ihr in denselben sich anschmiegenden Strahlen A, B, C, D u. s. w. entsprechen, so entsprechen auch (145) diesen Geraden des erstern Systems jene Punkte des letztern, woraus man (130) schliessen kann, dass je zwei homologe Elemente der Systeme einander doppelt entsprechen und also s die Ordnungscurve eines Polarsystems sey.

Jede Curve II. Ordnung wird aus jedem ausserhalb ihrer Ebene befindlichen Punkte durch eine Kegelfläche II. Ordnung projicirt, jede Kegelfläche II. Ordnung von jeder nicht durch ihren Mittelpunkt gehenden Ebene in einer Curve II. Ordnung geschnitten.

Wenn überhaupt ein ebenes System und ein Strahlenbündel zu einander collineär sind, so entspricht jeder Curve II. Ordnung s eine Kegelfläche II. Ordnung s_1. Werden in dem ebenen Systeme je zwei in Hinsicht auf die Curve s einander zugeordnete Elemente mit einander vertauscht, so entspricht der Curve s der Ebenenbüschel s_1 und dem Strahlenbüschel s die Kegelfläche s_1. In zwei reciproken ebenen Systemen entspricht jeder Curve II. Ordnung ein Strahlenbüschel II. Ordnung, welcher der Curve II. Ordnung sich anschmiegt, die dem der erstern sich anschmiegenden Strahlenbüschel entspricht.

248. Eine Curve II. Ordnung oder auch die von ihr eingeschlossene Figur heisst eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem die Curve mit der unendlich fernen Geraden der Ebene gar keinen Punkt gemein hat, oder diese Gerade in einem Punkte berührt oder in zwei Punkten schneidet. Jeder um die Figur beschriebene uneigentliche Winkel ist im ersten Falle ein Parallel-

streifen, im zweiten (62) ein Winkel der dritten und im dritten ein Winkel der vierten Art. Betrachtet man das ebene System als den Schnitt eines Parallelstrahlenbündels, so entspricht der Curve im ersten Falle eine elliptische, im zweiten eine parabolische und im dritten eine hyperbolische Cylinderfläche.

Der Schnitt einer eigentlichen Kegelfläche II. Ordnung mit einer Ebene, welche nicht durch den Mittelpunkt der Fläche geht, ist eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem die Kegelfläche mit der durch ihren Mittelpunkt gehenden zur erstern Ebene parallelen Ebene gar keinen Strahl oder einen Strahl oder zwei Strahlen gemein hat. Im letzten Falle schmiegen in diesen Strahlen der Kegelfläche die Ebenen sich an, von welchen die Assymptoten der Hyperbel die Spuren sind. Von den beiden Winkeln, welche die Assymptoten einer Hyperbel mit einander bilden, heisst derjenige, welcher um die Hyperbel beschrieben ist, der Assymptotenwinkel.

Eine Curve II. Ordnung kann auch, was im Obigen nicht angenommen wurde, im Unendlichen liegen, so dass sie also der Schnitt einer Kegelfläche II. Ordnung mit der unendlich fernen Ebene ist.

249. Wenn man (227) einen Punkt S, welcher mit einer Curve II. Ordnung in einerlei Ebene, aber nicht in der Curve liegt, als Ordnungspunkt und seine Polare u als Ordnungslinie annimmt, so erscheint die Curve als eine involutorische Curve. Je zwei Punkte A, B der Curve, welche mit dem Punkte S in einer und derselben Geraden V liegen, sind (246) durch diesen Punkt und einen Punkt R der Geraden u und eben so je zwei Tangenten A, B der Curve, welche (235) die Gerade u in einem und demselben Punkte schneiden, durch diese Gerade und eine durch den Punkt S gehende Gerade harmonisch getrennt. Wird die Gerade V um den Punkt S gedreht, so bewegen sich ihr Pol (der Schnittpunkt der Tangenten A, B) und ihre Spur in der Geraden u in einem und demselben oder im entgegengesetzten Sinne, je nachdem die Curve und die Gerade u sich nicht schneiden oder sich schneiden. Die von der Curve eingeschlossene in Hinsicht auf die Ordnungslinie u und den Ordnungspunkt S involutorische Figur wird im erstern Falle durch jede durch diesen

Punkt gehende Gerade, im letztern aber durch die Gerade u in zwei einander zugeordnete Theile getheilt.

250. Ein n Eck (79) heisst in eine Curve beschrieben, wenn alle seine Eckpunkte in der Curve liegen. Jedem einer Curve II. Ordnung einbeschriebenen vollständigen n Ecke ist ein um dieselbe beschriebenes vollständiges n Seit zugeordnet, dessen Seiten die Polaren von den Eckpunkten und dessen Eckpunkte die Pole von den Seiten des ersten Gebildes sind.

Jedes Dreieck EFG, welches in eine Curve II. Ordnung beschrieben ist, liegt mit dem Dreiecke efg, dessen Seiten fg, ge, ef die Curve in den Eckpunkten E, F, G des erstern berühren, perspektivisch.

Je zwei Eckpunkte des einbeschriebenen Dreiecks sind durch die Polare des dritten Eckpunktes und durch die Gerade, welche diesen Punkt mit dem Pole der ihm gegenüberliegenden Seite verbindet, harmonisch getrennt.

Je zwei Seiten des umbeschriebenen Dreiecks sind durch den Pol der dritten Seite und durch den Punkt, in welchem diese Seite von der Polare des ihr gegenüberliegenden Eckpunktes geschnitten wird, harmonisch getrennt.

Da nämlich (235) die Gerade Gg die Polare des Punktes A ist, in welchem die Geraden EF, ef sich schneiden, so sind (246) die Puukte E, F durch den Punkt A und durch den Schnittpunkt von EF und gG und also auch (94) die Punkte e, f durch die Punkte A, G harmonisch getrennt, daher auch (93) die Geraden Ee, Ff, Gg in einem und demselben Punkte sich schneiden müssen. Dasselbe folgt auch aus 242.

251. Die drei Punkte, in deren jedem ein Paar Gegenseiten eines in eine Curve II. Ordnung beschriebenen vollständigen Vierecks ABCD sich sichneiden, sind die Eckpunkte eines Polardreiecks, von dessen drei Seiten jede durch ein Paar Gegenpunkte des dem vollständigen Vierecke zugeordneten vollständigen Vierseits abcd geht.

Es werde die Gerade AB von der Geraden CD im Punkte P und von der Geraden p, welche den Schnittpunkt von AC und BD mit dem Schnittpunkte von AD und BC verbindet, im Punkte Q geschnitten, so sind (94) die Punkte P, Q durch die Punkte

A, B harmonisch getrennt und also in Hinsicht auf die Curve einander conjugirt. Da eben so der Schnittpunkt von CD und p dem Punkte P conjugirt ist, so folgt, dass die Gerade p die Polare des Punktes P ist und demnach auch durch die Pole ab, cd der Geraden AB, CD geht.

Die Diagonalen eines um eine Curve II. Ordnung beschriebenen Vierseits sind also einander conjugirt und durch die Diagonalen des ihm zugeordneten Vierecks harmonisch getrennt. Eben so sind die Punkte, in deren jedem ein Paar Gegenseiten dieses Vierecks sich schneiden, (die Pole der beiden erstern Diagonalen) einander conjugirt und durch die Punkte, in deren jedem ein Paar Gegenseiten jenes Vierseits sich schneiden, harmonisch getrennt.

252. Wenn man in der Ebene eines ebenen Polarsystems irgend zwei einander nicht conjugirte Gerade annimmt und alsdann auf jeden Punkt der einen den ihm conjugirten Punkt der andern bezieht, so sind die geraden Gebilde, da jedes ein Schnitt des dem andern zugeordneten Strahlenbüschels ist, projektivisch und folglich, wenn ihr Schnittpunkt sich selbst conjugirt ist, perspektivisch.

253. Jede Gerade, welche einer Seite AB eines in eine Curve II. Ordnung beschriebenen Dreiecks ABC conjugirt ist, schneidet die beiden andern Seiten in conjugirten Punkten. Und wenn eine Gerade zwei Seiten AC, BC des Dreiecks in zwei conjugirten Punkten Punkte als Mittelpunkte von Strahlenbüscheln annimmt und alsdann auf jeden Strahl des einen Büschels den ihm conjugirten Strahl des andern bezieht, so sind die Büschel, da jeder ein Schein des dem andern zugeordneten geraden Gebildes ist, projektivisch und folglich, wenn ihr gemeinschaftlicher Strahl sich selbst conjugirt ist, perspektivisch.

Jeder Punkt, welcher einem Eckpunkte eines um eine Curve II. Ordnung beschriebenen Dreiecks conjugirt ist, wird aus den beiden andern Eckpunkten durch conjugirte Strahlen projicirt. Und wenn ein Punkt aus zwei Eckpunkten des Dreiecks durch zwei conjugirte Strahlen proji-

schneidet, so geht sie durch den Pol der dritten Seite.

cirt wird, so liegt er in der Polare des dritten Eckpunktes.

Da nämlich die Polare a des Punktes A die Geraden AC, BC in zwei conjugirten Punkten schneidet und dasselbe von der Polare b des Punktes B gilt, so ist (252) ab der Punkt, welcher mit je zwei conjugirten Punkten der Seiten AC, BC in einer und derselben Geraden liegt. Projicirt man aus den Eckpunkten A, B einen und denselben Punkt D der Curve auf die ihnen gegenüberliegenden Seiten, so erhält man (251) zwei einander conjugirte Punkte dieser Seiten, woraus hervorgeht, wie die obigen Sätze auch mit den in 251 enthaltenen zusammenhängen.

254. Wenn zwei Eckpunkte eines Dreiecks in einer Curve II. Ordnung liegen und die ihnen gegenüberliegenden Seiten von irgend einer Geraden, welche durch den Pol der dritten Seite, aber durch keinen von jenen beiden Punkten geht, in conjugirten Punkten geschnitten werden, so liegt auch der dritte Eckpunht des Dreiecks in der Curve. Folgt aus 109 und 252.

Wenn zwei Seiten eines Dreiecks eine Curve II. Ordnung berühren und die ihnen gegenüberliegenden Eckpunkte aus irgend einem Punkte, welcher in der Polare des dritten Eckpunktes, aber nicht in der Curve liegt, durch conjugirte Strahlen projicirt werden, so wird die Curve auch von der dritten Seite des Dreiecks berührt.

255. Zwei Strahlenbüschel A B, welche eine Curve II. Ordnung aus zwei in ihr liegenden Punkten A, B projiciren, sind zu einander projektivisch.

Zwei gerade Gebilde, welche eine Curve II. Ordnung berühren und Schnitte des ihr sich anschmiegenden Strahlenbüschels sind, sind zu einander projektivisch.

Jeder Punkt C der Curve wird aus dem Punkte A durch einen Strahl AC des Büschels A und aus dem Punkte B durch den homologen Strahl BC des Büschels B projicirt. Da nun die Büschel (nach 239 und 253) von jeder Geraden, welche durch den Pol der Geraden AB, aber durch keinen von den beiden Punkten A, B geht, in zwei involutorisch liegenden projektivischen geraden Gebilden geschnitten werden, so folgt der Satz.

256. Zwei projektivische nicht concentrische Strahlenbüschel A, B, welche in einerlei Ebene, aber nicht perspektivisch liegen, erzeugen eine Curve II. Ordnung, der nämlich jeder Punkt angehört, in welchem ein Strahl des einen Büschels von dem homologen Strahle des andern geschnitten wird. Die Strahlen a, b, welche dem gemeinschaftlichen Strahle der beiden Büschel entsprechen, berühren die Curve in den Punkten A, B.

Zwei projektivische gerade Gebilde a, b, welche sich schneiden, aber nicht perspektivisch liegen, erzeugen einen Strahlenbüschel II. Ordnung, dem nämlich jede Gerade angehört, welche einen Punkt des einen geraden Gebildes mit dem homologen Punkte des andern verbindet. Die Punkte A, B, welche dem Schnittpunkte der beiden geraden Gebilde entsprechen, sind die Pole der Geraden a, b.

Es seyen G, H irgend zwei Punkte, welche durch die Punkte A, B harmonisch getrennt sind. Da nun (224) die Gerade b, welche den Punkt ab mit dem Punkte G verbindet, die Büschel A, B in zwei involutorisch liegenden geraden Gebilden schneidet, so kann man (240) das eine dieser Gebilde und den Strahlenbüschel, welcher das andere aus dem Punkte H projicirt, als zwei einander zugeordnete Gebilde eines Polarsystems betrachten, dessen Ordnungscurve die Gerade a im Punkte A berührt, folglich, weil die einander conjugirten Punkte G, H durch die Punkte A, B harmonisch getrennt sind, auch durch den Punkt B geht, und mithin (254) von je zwei homologen Strahlen AC, BC der Büschel A, B in einem und demselben Punkte geschnitten wird.

Eben so erzeugen zwei projektivische aber nicht perspektivische Ebenenbüschel, deren Axen sich schneiden, eine Kegelfläche II. Ordnung, und zwei projektivische Strahlenbüschel, welche concentrisch sind, aber weder in einerlei Ebene noch perspektivisch liegen, einen Ebenenbüschel II. Ordnung.

257. Die drei Punkte, in deren jedem ein Paar Gegenseiten eines in eine Curve II. Ordnung beschriebenen Sechsecks ABCDEF sich schneiden, liegen in einer und derselben Geraden.

Die drei Diagonalen, deren jede ein Paar Gegenpunkte eines um eine Curve II. Ordnung beschriebenen Sechsecks verbindet, schneiden sich in einem und demselben Punkte.

Es werde die Seite AB von den Seiten CD, DE in den Punkten K, M und die Seite BC von den Seiten AF, EF in den Punkten L, N geschnitten. Da nun (255) die Strahlenbüschel D(BCEA), F(BCEA) und mithin auch ihre Schnitte BKMA, BCNL zu einander projektivisch sind, so liegen (108) die Punkte M, N mit dem Schnittpunkte von KC und AL (oder CD und AF) in einer und derselben Geraden.

Was oben von den sechs Seiten eines in eine Curve II. Ordnung beschriebenen Sechsecks gesagt wurde, gilt auch von den fünf Seiten eines einbeschriebenen Fünfecks und der Geraden, welche die Curve in einem Eckpunkte desselben berührt, dann auch von den vier Seiten eines einbeschriebenen Vierecks und den Tangenten an zwei Eckpunkten und endlich auch von den drei Seiten eines einbeschriebenen Dreiecks und den Tangenten an seinen drei Eckpunkten, vorausgesetzt dass man jede Tangente, welche in Betrachtung kommt, zwischen den beiden Seiten einschaltet, welche im Berührungspunkte derselben sich schneiden.

Was oben von den sechs Eckpunkten eines um eine Curve II. Ordnung beschriebenen Sechsecks gesagt wurde, gilt auch von den fünf Eckpunkten eines umbeschriebenen Fünfecks und dem Berührungspunkte einer Seite, dann auch von den vier Eckpunkten eines umbeschriebenen Vierecks und den Berührungspunkten zweier Seiten und endlich auch von den drei Eckpunkten eines unbeschriebenen Dreiecks und den Berührungspunkten seiner drei Seiten, vorausgesetzt dass man jeden Berührungspunkt, welcher in Betrachtung kommt, zwischen den beiden Eckpunkten einschalte, die mit ihm in einer und derselben Seite liegen.

258. Durch jedes ebene Fünfeck ABCDE sind zwei Curven II. Ordnung bestimmt, von welchen nämlich die eine k durch die fünf Eckpunkte des Fünfecks geht, die andere s aber die fünf Seiten desselben berührt. Betrachtet man (238) die Eckpunkte A, B, C, D, E des Fünfecks als die Pole der ihnen gegenüberliegenden Seiten, so erhält man ein Polarsystem, in welchem jeder von den beiden Curven der der andern sich anschmiegende Strahlenbüschel zugeordnet ist.

Die Strahlenbüschel A, B erzeugen die Curve k, wenn sie projektivisch so aufeinander bezogen werden, dass den Strahlen AC, AD, AE des erstern die Strahlen BC, BD, BE des letztern entsprechen. — Von den beiden Strecken AB, A·B ist diejenige von der Curve k eingeschlossen, welche von gar keiner der drei Geraden CD, CE, DE oder von zweien derselben geschnitten wird. Die Punkte A, B sind in der Curve k im erstern Falle durch die Punkte C, D, E nicht getrennt, im letztern aber getrennt.

Die geraden Gebilde a, b erzeugen den Strahlenbüschel s, wenn sie projektivisch so aufeinander bezogen werden, dass den Punkten ac, ad, ae des erstern die Punkte bc, bd, be des letztern entsprechen. — Von den beiden Winkeln ab, a·b ist derjenige von der Curve s ausgeschlossen, welcher gar keinen der drei Punkte cd, ce, de oder zwei derselben in sich enthält. Die Strahlen a, b sind in dem Büschel s im erstern Falle durch die Strahlen c, d, e nicht getrennt, im letztern aber getrennt.

Eine Curve II. Ordnung ist auch bestimmt, wenn ein einbeschriebenes Viereck und die Tangente an einem Eckpunkte desselben oder ein umbeschriebenes Viereck und der Berührungspunkt einer Seite oder ein einbeschriebenes Dreieck und die Tangenten an zwei Eckpunkten desselben oder ein umbeschriebenes Dreieck und die Berührungspunkte zweier Seiten gegeben sind.

259. Liegen die drei Punkte, in deren jedem ein Paar Gegenseiten eines Sechsecks ABCDEF sich schneiden, in einer und derselben Geraden, so liegen die sechs Eckpunkte des Sechsecks entweder in einer Curve II. Ordnung oder es liegen je drei, unter welcher keine zwei aufeinanderfolgende sind, in einer Geraden.

Schneiden sich die drei Diagonalen, deren jede ein Paar Gegenpunkte eines Sechsecks verbindet, in einem und demselben Punkte, so berühren die sechs Seiten des Sechsecks entweder eine Curve II. Ordnung, oder es schneiden sich je drei, unter welchen keine zwei aufeinanderfolgende sind, in einem Punkte.

Es werde die Gerade AB von den Geraden CD, DE in den Punkten K, M und BC von den Geraden AF, EF in den Punkten L, N geschnitten. Wenn nun der Schnittpunkt von KC und

AL (oder CD und AF) in der Geraden MN liegt, so sind die geraden Gebilde BKMA, BCNL und also auch die Strahlenbüschel D(BCEA), F(BCEA) zu einander projektivisch, woraus der Satz folgt.

260. Wenn von einer Curve II. Ordnung fünf Punkte A, B, C, D, E gegeben sind, so ist durch jede Gerade p, welche durch den Pnnkt A geht, ein Punkt F der Curve bestimmt, welcher nämlich aus dem Punkte A durch die Gerade p projicirt wird. Man erhält den Punkt F, wenn man den Schnittpunkt von AB und DE mit dem Schnittpunkte von CD und p durch eine Gerade verbindet und alsdann aus dem Punkte, in welchem diese Gerade die Gerade BC schneidet, den Punkt E auf die Gerade p projicirt. Soll der Punkt F mit dem Punkte A zusammenfallen und also die Gerade p die Curve im Punkte A berühren, so muss sie durch denjenigen Punkt der Geraden CD gehen, welcher mit dem Schnittpunkte von AB und DE und dem Schnittpunkte von BC und EA in einer und derselben Geraden liegt. Umgekehrt findet man, wenn von einer Curve II. Ordnung fünf Tangenten a, b, c, d, e gegeben sind, die Berührungspunkte dieser Tangenten, wenn man in irgend einem der Fünfseite abcde, abced u. s. w. aus jedem Eckpunkte auf die ihm gegenüberliegende Seite den Schnittpunkt der beiden Diagonalen projicirt, von welchen keine durch jenen Eckpunkt geht und auch keine die ihm benachbarten Eckpunkte verbindet.

Aehnliche Aufgaben vom ersten Grade, welche nämlich auf die in 67 enthaltenen sich zurückführen lassen, bieten sich dar, wenn von einer Curve II. Ordnung vier Punkte und die Tangente an einem dieser Punkte oder vier Tangenten und der Berührungspunkt einer dieser Tangenten u. s. w. gegeben sind.

261. Wenn die n Seiten a_1, a_2, a_3, ... a_n eines ebenen n Ecks um feste Punkte A_1, A_2, A_3 ... A_n sich drehen, während n - 1 Eckpunkte $a_1 a_2$, $a_2 a_3$ .. $a_{n-1} a_n$ in festen Geraden sich bewegen, so bewegt sich der letzte Eckpunkt entweder auch in ei-

Wenn die n Eckpunkte eines ebenen n Ecks in festen Geraden sich bewegen, während n – 1 Seiten desselben um feste Punkte sich drehen, so dreht sich die letzte Seite entweder auch um einen festen Punkt, oder es beschreibt der Punkt,

ner festen Geraden oder in einer Curve II. Ordnung, welche durch jene festen Elemente bestimmt ist.

um welchen sie sich dreht, indem derselbe in ihr sich bewegt, eine durch jene festen Elemente bestimmte Curve II. Ordnung.

Die Geraden $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ sind nämlich homologe Strahlen von n Strahlenbüscheln $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$, von welchen jeder folgende dem vorhergehenden und mithin auch der letzte dem ersten projektivisch ist. Stellt man das veränderliche n Eck in drei Zuständen dar, so hat man zu drei Strahlen des Büschels A_1 die homologen Strahlen des Büschels A_n. Da übrigens die Büschel A_1, A_2 auch projektivisch sind, wenn der Punkt $a_1 a_2$ in einer durch die beiden Punkte A_1, A_2 gehenden Curve II. Ordnung sich bewegt, und Analoges von den Büscheln A_2, A_3 u. s. w. gilt, so lassen sich die obigen Sätze und die in (311) enthaltenen Aufgaben leicht noch verallgemeinern.

262. Wenn von zwei zu einander projektivischen Strahlenbüscheln der eine gegeben ist, und vier Strahlen des andern, welche gegebenen Strahlen a, b, c, d des erstern entsprechen, durch vier gegebene Punkte A, B, C, D gehen, die nicht alle vier in einer und derselben Geraden liegen, so liegt der Mittelpunkt M des andern Büschels entweder in einer gegebenen Geraden oder in einer gegebenen Curve II. Ordnung.

Wenn von zwei zu einander projektivischen geraden Gebilden das eine gegeben, und vier Punkte des andern, welche gegebenen Punkten des erstern entsprechen, in vier gegebenen Geraden liegen, die nicht alle vier durch einen und denselben Punkt gehen, so geht die Gerade, in welcher das andere Gebilde liegt, entweder durch einen gegebenen Punkt oder sie berührt eine gegebene Curve II. Ordnung.

Liegen nämlich die Punkte A, B, C, in einer und derselben Geraden, so giebt es in dieser Geraden einen Punkt D_1, so dass $ABCD_1 \barwedge abcd$ ist. In diesem Falle ist offenbar die Gerade DD_1 der geometrische Ort des Punktes M. Liegen aber keine drei von den vier Punkten A, B, C, D in einer und derselben Geraden, so ist, wenn durch den Punkt D eine Gerade DD gelegt wird, so dass $D(ABCD) \barwedge abcd$ ist, auch $M(ABCD) \barwedge D(ABCD)$ und mithin (256) der geometrische Ort des Punk-

tes M die Curve II. Ordnung, welche durch die vier gegebenen Punkte geht und im Punkte D die Gerade DD berührt. — Wenn umgekehrt der Mittelpunkt M des Strahlenbüschels M(ABCD), der dem gegebenen abcd projektivisch ist, in einer gegebenen Curve II. Ordnung liegt, und drei Strahlen desselben gegebene Punkte A, B, C der Curve projiciren, so projicirt auch der vierte Strahl einen gegebenen Punkt der Curve.

263. Es sind in einer Ebene fünf Punkte A, B, C, D, E gegeben, von welchen keine vier in einer und derselben Geraden liegen; man soll einen Punkt M finden, so dass der Strahlenbüschel M(A B C D E) einem gegebenen a b c d e projektivisch sey.

Es sind in einer Ebene fünf Gerade a, b, c, d, e gegeben, von welchen keine vier durch einen und denselben Punkt gehen; man soll eine sechste Gerade p finden, so dass das gerade Gebilde p(a b c d e) einem gegebenen projektivisch sey.

Liegen die Punkte A, B, C in einer und derselben Geraden, so nehme man in dieser Geraden die Punkte D_1, E_1 so, dass $ABCD_1E_1 \pi abcde$ ist. Zieht man alsdann die Geraden DD_1, EE_1, so schneiden sich diese in dem gesuchten Punkte. Wenn aber keine drei von den fünf gegebenen Punkten in einer und derselben Geraden liegen, so ziehe man durch den Punkt D zwei Gerade DD, DE_1, so dass $D(ABCDE_1) \pi abcde$ ist, und suche alsdann (260) in der Curve II. Ordnung, welche durch die vier Punkte A, B, C, D geht und im Punkte D die Gerade DD berührt, den Punkt E_2, welcher aus dem Punkte D durch die Gerade DE_1 projicirt wird. Wenn nun $M(ABCDE) \pi abcde \pi D(ABCDE_2)$ seyn soll, und E ein vom Punkte E_2 verschiedener Punkt ist, so muss M derjenige Punkt der Curve seyn, welcher aus dem Punkte E_2 durch die Gerade E_2E projicirt wird. Fallen aber die Punkte E, E_2 in einander, so leistet jeder Punkt der Curve der Aufgabe Genüge.

§. 20.

Projektivische Beziehungen zwischen Curven II. Ordnung.

264. Will man zwei gegebene Curven II. Ordnung s, s_1 projektivisch aufeinander beziehen, so kann man zu drei Punkten A, B, C der einen die homologen Punkte A_1, B_1, C_1 in der andern nach Belieben annehmen, wodurch aber alsdann jedem Punkte der einen ein Punkt der andern zugewiesen ist.

Sollen nämlich zwei ebene Systeme collineär so aufeinander bezogen werden, dass der Curve s und den Punkten A, B, C des einen die Curve s_1 und die Punkte A_1, B_1, C_1 des andern entsprechen, so muss auch dem Pole P der Geraden AB der Pol P_1 der Geraden A_1B_1 entsprechen. Und wenn man die ebenen Systeme projektivisch so aufeinander bezieht, dass den Punkten A, B, C, P des einen die Punkte A_1, B_1, C_1, D_1 des andern entsprechen, so entspricht der Curve s, welche die Geraden PA, PB in den Punkten A, B berührt und durch den Punkt C geht, die Curve s_1, welche die Geraden P_1A_1, P_1B_1 in den Punkten A_1, B_1 berührt und durch den Punkt C_1 geht.

Vertauscht man in dem einen von den beiden Systemen jeden Punkt mit seiner Polare, so sind alsdann die Systeme projektivisch so aufeinander bezogen, dass der Curve s der der Curve s_1 sich anschmiegende Strahlenbüschel und den Punkten A, B, C die Strahlen entsprechen, welche die Curve s_1 in den Punkten A_1, B_1, C_1 berühren.

265. Jeder Strahlenbüschel P, welcher die eine s von zwei zu einander projektivischen Curven II. Ordnung aus einem in ihr befindlichen Punkte projicirt, ist jedem Strahlenbüschel Q_1 projektieisch, welcher die andere s_1 aus einem in ihr befindlichen Punkte projicirt, so dass nämlich je zwei Strahlen PA, Q_1A_1, welche homologe Punkte A, A_1 der Curven projiciren, einander entsprechen. Der Büschel P ist nämlich dem ihm entsprechenden Büschel P_1, dieser aber nach 255 dem Büschel Q_1 projektivisch.

Eben so sind je zwei gerade Gebilde u, v_1, von welchen das eine ein Schnitt des Strahlenbüschels s mit einer Tangente der Curve s und das andere ein Schnitt des Strahlenbüschels s_1 mit einer Tangente der Curve s_1 ist, sowohl unter sich als auch

(264) jenen Strahlenbüscheln erster Ordnung projektivisch, so dass nämlich durch je zwei einander entsprechende Punkte A, A_1 der Curven und die Tangenten a, a_1 an diesem Punkte vier einander entsprechende Elemente PA, Q_1A_1, ua, v_1a_1 der Gebilde P, Q_1, u, v_1 bestimmt sind.

266. Will man zwei gegebene Curven II. Ordnung projektivisch aufeinander beziehen, so darf man nur nach 264 und 265 auf einen Strahlenbüschel, dessen Mittelpunkt in der einen Curve liegt, einen Strahlenbüschel, dessen Mittelpunkt in der andern liegt, projektivisch beziehen und alsdann je zwei Punkte der Curven, welche aus den Mittelpunkten der Büschel durch homologe Strahlen projicirt werden, einander entsprechend nennen.

267. Wenn der Mittelpunkt eines Strahlenbüschels ein gemeinschaftlicher Punkt von zwei Curven II. Ordnung ist, und man je zwei Punkte der Curven, welche durch einen und denselben Strahl des Büschels projicirt werden, einander entsprechend nennt, so sind die Curven projektivisch aufeinander bezogen. Haben die Curven in jenem Punkte eine gemeinschaftliche Tangente, so sind sie zu einander perspektivisch, daher alsdann die Punkte, in deren jedem ein Paar homologe Tangenten derselben sich schneiden, alle in einer und derselben Geraden liegen.

auf ein gerades Gebilde, welches die eine Curve berührt, ein gerades Gebilde, welches die andere berührt, projektivisch beziehen und alsdann je zwei Tangenten der Curven, welche die geraden Gebilde in homologen Punkten schneiden, einander entsprechend nennen.

Wenn eine Gerade u eine gemeinschaftliche Tangente von zwei Curven II. Ordnung ist, und man je zwei Tangenten der Curven, welche jene Gerade in einem und demselben Punkte schneiden einander entsprechend nennt, so sind die Curven (266) projektivisch aufeinander bezogen. Berühren die Curven jene Gerade in einem und demselben Punkte, so sind sie zu einander perspektivisch, daher alsdann die Strahlen, deren jeder ein Paar homologe Punkte derselben verbindet, alle in einem und demselben Punkte sich schneiden.

Der Satz rechter Hand gilt auch, wenn die Curven nicht in einerlei Ebene liegen. Die beiden collineären Systeme, von welchen die Curven homologe Gebilde sind, haben, wenn diese die Gerade u in einem und demselben Punkte berühren, jeden Punkt dieser Geraden entsprechend gemein.

268. Zwei Curven II. Ordnung, welche in zwei Ebenen liegen und die Schnittlinie dieser Ebenen in einem und demselben Punkte berühren, sind (267) Schnitte einer und derselben Kegelfläche II. Ordnung.

269. Zwei Curven II. Ordnung, welche in einen und denselben Winkel beschrieben sind, können auf zweierlei Art perspektivisch so aufeinander bezogen werden, dass je zwei homologe Punkte aus dem Mittelpunkte S des Winkels durch einen und denselben Strahl projicirt werden. Dasselbe gilt auch, wenn kein Strahl des Büschels S die Curven berührt, aber wie im erstern Falle je zwei Strahlen desselben, welche in Hinsicht auf die eine Curve einander conjugirt sind, es auch in Hinsicht auf die andere sind.

Zwei nicht concentrische Kegelflächen II. Ordnung, welche einen Strahl mit einander gemein haben und in ihm von einer und derselben Ebene berührt werden, schneiden sich in einer Curve II. Ordnung.

Zwei Curven II. Ordnung s, s_1, welche von einer Geraden u ein und dasselbe Stück einschliessen, können auf zweierlei Art perspektivisch so aufeinander bezogen werden, dass je zwei homologe Tangenten derselben jene Gerade in einem und demselben Punkte schneiden. Dasselbe gilt auch, wenn die Curven mit der Geraden gar keinen Punkt gemein haben, aber wie im erstern Falle je zwei Punkte dieser Linie, welche in Hinsicht auf die eine Curve einander conjugirt sind, es auch in Hinsicht auf die andere sind.

Es seyen P, P_1 die Pole der Geraden u in Hinsicht auf die Curven s, s_1. Man ziehe durch den Punkt P eine Gerade, welche die Curve s in zwei Punkten A, B schneidet, so wird auch die Gerade P_1E, welche den Punkt P_1 mit dem Schnittpunkte E von AB und u verbindet, die Curve s_1 in zwei Punkten A_1, B_1 schneiden. Es sey ferner in der Geraden u dem Punkte E der Punkt F und dem Punkte G der Punkt H conjugirt. Werden

nun zwei ebene Systeme collineär so aufeinander bezogen, dass den Punkten G, H, A, B des einen die Punkte G, H, A_1, B_1 des andern entsprechen, so haben sie auch den Punkt E und folglich alle Punkte der Geraden u entsprechend gemein, woraus man schliessen kann, dass die beiden Systeme perspektivisch liegen, und dass der Curve s, welche die Geraden FA, FB in den Punkten A, B berührt und (234) durch den Schnittpunkt von GA und HB geht, die Curve s_1 entspricht, welche die Gerade FA_1, FB_1 in den Punkten A_1, B_1 berührt und durch den Schnittpunkt von GA_1 und HB_1 geht. Eben so entspricht der Curve s die Curve s_1, wenn zwei ebene Systeme perspektivisch so aufeinander bezogen werden, dass den Punkten G, H, A, B des einen die Punkte G, H, B_1, A_1 des andern entsprechen. Geht die Gerade AB nicht durch den Punkt P_1, so ist das perspektivische Projektionscentrum der beiden Systeme im erstern Falle der Schnittpunkt von AA_1, und BB_1, im letztern aber der Schnittpunkt von AB_1, und A_1B, welcher vom erstern Punkte durch die beiden Punkte P, P_1, die in jedem Falle einander entsprechen, harmonisch getrennt ist.

Aus diesem Beweise geht hervor, dass der obige Satz rechter Hand auch gilt, wenn die Curven nicht in einerlei Ebene liegen. Nur ist alsdann derselbe einem andern Satze gegenüberzustellen.

270. Wenn zwei Curven II. Ordnung in zwei Ebenen liegen und von der Schnittlinie dieser Ebenen ein und dasselbe Stück einschliessen, so giebt es (269) zwei Kegelflächen, deren jede durch beide Curven geht. Dasselbe gilt auch, wenn die Curven mit der Schnittlinie der Ebenen gar keinen Punkt gemein haben, aber wie im erstern Falle je zwei Punkte dieser Geraden, welche in Hinsicht auf die eine

Zwei nicht concentrische Kegelflächen II. Ordnung, welche in einen und denselben Winkel beschrieben sind, schneiden sich in zwei Curven II. Ordnung. Dasselbe gilt auch, wenn die Kegelflächen gar keine gemeinschaftliche Berührungsebene haben, aber wie im erstern Falle je zwei Ebenen, welche in Hinsicht auf die eine Fläche einander conjugirt sind und durch den Mittelpunkt der andern gehen, auch in Hinsicht auf

Curve einander conjugirt sind, es auch in Hinsicht auf die andere sind.

Durch je zwei Curven, welche Schnitte einer und derselben Kegelfläche II. Ordnung sind, aber keine gemeinschaftliche Tangente haben, lässt sich noch eine Kegelfläche II. Ordnung legen.

die andere einander conjugirt sind.

Je zwei Kegelflächen, welche eine und dieselbe Curve II. Ordnung projiciren, aber keinen Strahl mit einander gemein haben, schneiden sich in noch einer Curve II. Ordnung.

Die Pole der Geraden, in welcher die Ebenen der Curven sich schneiden, sind durch die Mittelpunkte der Kegelflächen, die Polaren der Geraden, welche diese Punkte verbindet, durch jene Ebenen harmonisch getrennt.

271. Wenn zwei collineäre ebene Systeme einen Strahlenbüschel S und also auch ein gerades Gebilde u entsprechend gemein haben, so entspricht jeder Curve s des einen Systems, welche die Gerade u in einem Punkte T berührt, eine Curve s_1 des andern, welche die Gerade u ebenfalls im Punkte T berührt. Wenn ferner der Geraden a des erstern Systems, welche durch keinen von den Punkten S, T geht, die Gerade a_1 des letztern entspricht, so entspricht auch dem Winkel au, welcher die dem Punkte T zunächstliegenden Theile der Curve s enthält, der Winkel a_1u, welche die dem Punkte T zunächstliegenden Theile der Curve s_1 enthält, woraus hervorgeht, dass die Curven im Punkte T die Gerade u auf einerlei oder entgegengesetzten Seiten berühren, je nachdem die Systeme einstimmig- oder entgegengesetzt-perspektivisch sind. Man nehme nun an, dass die Systeme einstimmig-perspektivisch seyen und dass der Punkt T ein gewöhnlicher Punkt der Curven sey, so hat man folgende Fälle zu unterscheiden:

I. Wenn der Punkt S ausserhalb der Geraden u liegt, so wird die Curve s im Punkte T von der Curve s_1 auf ihrer hohlen oder erhabenen Seite berührt, je nachdem die Gerade h, welche den Punkt S mit dem Punkte aa_1 verbindet, von der Geraden a durch die Geraden a_1, u oder von der Geraden a_1 durch die Geraden a, u getrennt ist. — Jedes gerade Gebilde SPP_1R;

welches aus dem Punkte S, einem Punkte P der Curve s, dem homologen Punkte P_1 der Curve s_1 und einem Punkte R der Geraden u besteht, ist (136) dem Strahlenbüschel haa_1u projektivisch.

II. Wenn der Punkt S ein von T verschiedener Punkt der Geraden u ist, so schneiden sich die Curven s, s_1 im Punkte T. — Schneidet eine durch den Punkt S gehende Gerade die eine Curve in den Punkten C, D und die andere in den Punkten C_1, D_1, so ist (112) von den einander entsprechenden Strecken CD, C_1D_1 keine ganz in der andern enthalten.

III. Wenn der Punkt S mit dem Punkte T zusammenfällt, so wird in diesem Punkte die Curve s von der Curve s_1 auf der hohlen oder erhabenen Seite berührt, je nachdem der Winkel au den Winkel a_1u oder dieser den erstern in sich enthält. — Schneidet eine durch den Punkt S gehende Gerade die Curven s, s_1 in den Punkten c, c_1 und die Geraden a, a_1 in den Punkten A, A_1, so liegt von den einander entsprechenden Strecken CA, C_1A_1 keine ganz in der andern.

272. Wenn zwei collineäre ebene Systeme einen Strahlenbüschel S und also auch ein gerades Gebilde u entsprechend gemein haben, so entspricht jeder durch den Punkt S gehenden Curve s des einen Systems eine ebenfalls durch diesen Punkt gehende Curve s_1 des andern. Wenn ferner S ein gewöhnlicher Punkt der Curven ist, in welchem sie also von einem Strahle v des Büschels S berührt, von allen übrigen Strahlen desselben aber geschnitten werden, und dem Punkte A des erstern Systems, welcher in keiner der Geraden u, v liegt, der Punkt A_1 des letztern entspricht, so entspricht der Strecke AS, welche die Curve s auf der hohlen Seite trifft, die Strecke A_1S, welche die Curve s_1 auf der hohlen Seite trifft, woraus hervorgeht, dass die Curven die Gerade v auf einerlei oder entgegengesetzten Seiten berühren, je nachdem die Systeme einstimmig- oder entgegengesetzt-perspektivisch sind. Sind die Systeme einstimmig-perspektivisch, so hat man folgende Fälle zu unterscheiden.

I. Wenn die Gerade u nicht durch den Punkt S geht, so wird die Curve s von der Curve s_1 auf der hohlen oder erhabenen Seite berührt, je nachdem der Schnittpunkt R von AA_1 und

u vom Punkte A_1 durch die Punkte S, A oder vom Punkte A durch die Punkte S, A_1 getrennt ist. — Jedes gerade Gebilde SPP_1Q, welches aus dem Punkte S noch einem Punkte P der Curve s, dem entsprechenden Punkte P_1 der Curve s_1 und einem Punkte Q der Geraden u besteht, ist dem Gebilde SAA_1R projektivisch.

II. Wenn die Geraden u, v im Punkte S sich schneiden, so schneiden sich in diesem Punkte auch die beiden Curven. — Kein Winkel, welcher einen Punkt der Geraden u zum Mittelpunkt und zwei Tangenten der einen Curve zu Schenkeln hat, liegt ganz in dem ihm entsprechenden Winkel.

III. Wenn die Gerade u mit der Geraden v zusammenfällt, so wird (271) die Curve s von der Curve s_1 auf der hohlen oder erhabenen Seite berührt, je nachdem die Strecke AS die Strecke A_1S oder diese die erstere in sich enthält.

273. Es seyen k, k_1, k_2, k_3 homologe Curven von vier zu einander perspektivischen Systemen, welche in einerlei Ebene liegen und ein und dasselbe gerade Gebilde u entsprechend gemein. Wenn nun die Curven die Gerade u im Punkte T berühren, von jeder andern durch diesen Punkt gehenden Geraden aber in ihm geschnitten werden, und das gemeinschaftliche Projektionscentrum von k und k_1 der Punkt T, das von k und k_2 ein anderer Punkt T_1 der Geraden u, das von k und k_3 ein ausserhalb der Geraden u befindlicher Punkt T_2, folglich das von k_1 und k_2 ein dritter Punkt der Geraden u, das von k_1 und k_3 ein dritter Punkt der Geraden TT_2 und das von k_2 und k_3 ein dritter Punkt der Geraden T_1T_2 ist, so kann im Punkte T, in welchem die Curven k, k_1 sich berühren, die Curve k_2, welche beide in ihm schneidet, nicht zwischen den beiden erstern, und die Curve k_3, weil sie die drei erstern in T berührt, nicht zwischen zweien derselben durchgehen. Es ist hiedurch bewiesen, dass die Curven s, s_1 im zweiten der in 271 näher betrachteten Fälle inniger als im ersten und im dritten inniger als im zweiten sich aneinander anschmiegen. Eben so kann diess von den Curven s, s_1 in 272 bewiesen werden.

Man kann auch sagen, dass im zweiten Falle ein Berührungspunkt der Curven mit einem Schnittpunkte, im dritten aber

zwei Berührungspunkte vereinigt seyen. Wenn z. B. in 272 die Curve s und die Punkte S, A, A_1 als gegeben betrachtet werden, so ist durch jede Gerade u, welche durch keinen von den beiden letztern Punkten geht, eine Curve s_1 bestimmt. Nimmt man nun an, dass die Gerade u um einen ausserhalb der beiden Geraden AA_1, v befindlichen Punkt sich drehe, so fällt einmal der Punkt R und zugleich ein Schnittpunkt der Curven s, s_1 mit dem Punkte S zusammen. Dieser Fall macht alsdann den Uebergang von dem einen der in I erwähnten Fälle zum andern. Nimmt man an, dass die Gerade u die Curve s in einem Punkte P berühre und alsdann den der Curve s sich anschmiegenden Strahlenbüschel beschreibe, so muss, wenn die Gerade u mit der Geraden v zusammenfällt, auch der Berührungspunkt P der beiden Curven s, s_1 mit ihrem Berührungspunkte S zusammenfallen. Endlich wird noch bemerkt, dass auch der Fall II, wenn man die Curve s und also auch die Curve s_1 in einem bestimmten Sinne sich beschrieben denkt, selbst wieder zwei Fälle in sich begreift, indem die Curve s_1 im Punkte S entweder von der hohlen Seite der Curve s auf die erhabene oder von der erhabenen auf die hohle übergeht. Wird die Gerade u durch den Punkt S gelegt und alsdann um diesen Punkt so gedreht, dass sie einmal über die Gerade v hinweggeht, so bildet der Fall III den Uebergang von dem einen der beiden in II enthaltenen Fälle zum andern.

274. Wenn zwei Curven II. Ordnung eine Gerade p in einem und demselben Punkte P berühren, so sind die geraden Gebilde p, p_1, von welchen das eine dem Strahlenbüschel P in Hinsicht auf die eine und das andere demselben Büschel in Hinsicht auf die andere Curve zugeordnet ist, einstimmig- oder entgegengesetzt projektivisch, je nachdem die Curven im Punkte P die Gerade p auf einerlei oder entgegengesetzten Seiten berühren. Sind die geraden Gebilde p, p_1 einstimmig-projektivisch, so hat man ferner zu unterscheiden, ob sie zwei Punkte P, Q oder nur den Punkt P oder alle ihre Punkte entsprechend gemein haben. Im zweiten dieser Fälle schmiegen sich die Curven inniger als im ersten, im dritten inniger als in jedem der beiden erstern an einander an.

Im ersten Falle enthält nämlich der Strahlenbüschel P zwei Strahlen p, q deren Pole P, Q in Hinsicht auf beide Curven dieselben sind. Im zweiten Falle gilt diess nur von dem Strahle p, im dritten aber von allen Strahlen des Büschels P. Bezieht man daher die Curven perspektivisch so aufeinander, dass je zwei homologe Punkte mit dem Punkte P in einer und derselben Geraden liegen, so muss die Gerade u, welche von je zwei homologen Tangenten in einem und demselben Punkte geschnitten wird, im ersten Falle die Gerade p im Punkte Q, im zweiten Falle im Punkte P schneiden, im dritten Falle aber mit der Geraden p zusammenfallen. Bezieht man die Curven perspektivisch so aufeinander, dass je zwei homologe Tangenten die Gerade p in einem und demselben Punkte schneiden, so ist ihr gemeinschaftliches Projektionscentrum im ersten Falle ein ausserhalb der Geraden p befindlicher Punkt, im zweiten ein von P verschiedener Punkt der Geraden p und im dritten der Punkt P selbst.

275. Durch die drei Eckpunkte eines gegebenen Dreiecks SA_1B_1 eine Curve II. Ordnung zu legen, welche einer gegebenen Curve II. Ordnung, welche nicht durch alle drei Eckpunkte des Dreiecks geht, aber zwei Seiten desselben in einem Eckpunkte S schneidet, in diesem Punkte so innig als möglich sich anschmiege.

Es seyen A, B diejenigen Punkte der gegebenen Curve, welche aus dem Punkte S durch die Geraden SA_1, SB_1 projicirt werden. Bezieht man nun zwei ebene Systeme perspektivisch so aufeinander, dass sie den Strahlenbüschel S und das gerade Gebilde, welches den Punkt S mit dem Schnittpunkte von AB und A_1B_1 verbindet, entsprechend gemein haben und dass dem Punkte A des einen der Punkt A_1 des andern und also dem Punkte B des erstern der Punkt B_1 des letztern entspricht, so ist die Curve, welche der gegebenen entspricht, die gesuchte.

Sind eine Curve II. Ordnung und zwei Punkte S, A gegeben, von welchen der eine S in der Curve, der andere aber weder in der Curve noch in der Geraden u liegt, welche im erstern die Curve berührt, so findet man diejenige Curve II. Ordnung, welche durch die beiden gegebenen Punkte geht und im erstern der gegebenen Curve so innig als möglich sich anschmiegt, wenn

man zwei ebene Systeme perspektivisch so aufeinander bezieht, dass sie den Strahlenbüschel S und das gerade Gebilde u entsprechend gemein haben, und dass der Punkt A_1 demjenigen Punkte der gegebenen Curve entspricht, welcher aus dem Punkt S durch die Gerade SA_1 projicirt wird. Eben so leicht lassen die reciproken Aufgaben sich auflösen.

276. Sollen zwei in einerlei Ebene liegende Systeme projektivisch so einander bezogen werden, dass sie eine gegebene Curve II. Ordnung entsprechend gemein haben, so kann man (264) in dieser Curve zu drei Punkten A, B, C des einen Systems die homologen Punkte A_1, B_1, C_1 des andern nach Belieben annehmen, wodurch aber alsdann jedem Elemente des einen Systems ein Element des andern zugewiesen ist. Wenn nun die gegebene Curve als Gebilde des einen Systems durch s und als Gebilde des andern durch s_1 bezeichnet wird, und die Systeme nicht alle ihre Elemente entsprechend gemein haben, was nur der Fall wäre, wenn A mit A_1, B mit B_1 und C mit C_1 zusammenfiele, so gilt Folgendes.

I. Projicirt man die Curven s, s_1 aus einem und demselben in ihnen befindlichen Punkte M, so erhält man (265) zwei zu einander projektivische Strahlenbüschel, welche zwei Strahlen oder nur einen Strahl oder gar keinen Strahl entsprechend gemein haben, je nachdem die Curven zwei Punkte oder nur einen Punkt oder gar keinen Punkt entsprechend gemein haben. Den Strahlen MA, MB, MC des einen Büschels entsprechen die Strahlen MA_1, MB_1, MC_1 des andern.

II. Projicirt man die Curve s_1 aus einem sich nicht selbst entsprechende Punkte A der Curve s und diese aus dem homologen Punkte A_1 der Curve s_1, so erhält man (noch 108 und 265) zwei zu einander perspektivische Strahlenbüschel. Den Strahlen AA_1, AB_1, AC_1 des erstern Büschels entsprechen die Strahlen A_1A, A_1B, A_1C des letztern. Die Gerade h, welche von je zwei homologen Strahlen dieser Büschel in einem und demselben Punkte geschnitten wird, geht, wenn die Curven s, s_1 zwei Punkte entsprechend gemein haben, durch diese beiden Punkte. Haben die Curven nur einen Punkt entsprechend gemein, so werden sie in diesem Punkte von der Geraden h berührt. Wenn aber die

Curven gar keinen Punkt entsprechend gemein haben, so haben sie auch mit der Geraden h keinen Punkt gemein.

III. Wenn irgend zwei Punkte der Curven s, s_1 und also auch zwei Strahlen der in I betrachteten Büschel, demnach (215) je zwei homologe Strahlen dieser Büschel und also auch je zwei homologe Punkte der Curven einander doppelt entsprechen, so müssen die Systeme, da jede Gerade, welche ein Paar homologe Punkte verbindet, sich selbst entspricht, einen Strahlenbüschel entsprechend gemein haben und folglich (227) involutorisch liegen.

IV. Wenn drei Gerade AA_1, BB_1, CC_1, deren jede einen Punkt der Curve s mit dem homologen Punkte der Curve s_1 verbindet, in einem und demselben Punkte sich schneiden, so kann man ebenfalls schliessen, dass die Systeme involutorisch liegen. Da nämlich (251) dieser Schnittpunkt sowohl dem Schnittpunkte von AB_1 und A_1B als auch dem Schnittpunkte von AC_1 A_1C conjugirt und mithin der Pol der Geraden h ist, folglich diese Gerade auch von den Geraden AB, A_1B_1 in einem und demselben Punkte geschnitten wird, so entspricht der Punkt B der Curve s_1 dem Punkte B_1 der Curve s. Dasselbe folgt auch aus 249 und 264.

V. Die zu einander collineären ebenen Systeme haben die Gerade h, die von je zwei Geraden PQ_1, P_1Q, von welchen die eine irgend zwei nicht homologe Punkte der Curven s, s_1 und die andere die ihnen entsprechenden Punkte verbindet, in einem und demselben Punkte geschnitten wird, und eben so den Punkt H (den Pol der Geraden h), welcher (251) mit dem Schnittpunkte pq_1 von je zwei nicht homologen Tangenten der Curven s, s_1 und dem Schnittpunkte p_1q der ihnen entsprechenden Tangenten in einer und derselben Geraden liegt, entsprechend gemein.

Projicirt man aus dem erstern von den beiden Punkten P, P_1 die Curve s_1 und aus dem letztern die Curve s, so erhält man zwei zu einander perspektivische Strahlenbüschel. Dass aber die Gerade, welche von je zwei homologen Strahlen dieser Büschel in einem und demselben Punkte geschnitten wird, mit der in II. erwähnten Geraden h zusammenfällt, geht, wenn auch die collineären Systeme nicht involutorisch liegen und die Curven s, s_1 kei-

nen Punkt entsprechend gemein haben, daraus hervor, weil die drei Punkte, in deren jedem ein Paar Gegenseiten des Sechsecks $AP_1QA_1PQ_1$ sich schneiden, in einer und derselben Geraden liegen. Da ferner (251) der Schnittpunkt von PQ_1 und P_1Q mit dem Pole pq von PQ und dem Pole p_1q_1 von P_1Q_1 in einer und derselben Geraden liegt, und mithin die Gerade h, im Falle sie von zwei homologen Punkten pq, p_1q_1 der collineären Systeme den einen enthält, auch den andern enthalten muss, so folgt, dass die beiden Systeme die Gerade h und also auch ihren Pol H entsprechend gemein haben.

277. Wenn von den $n+1$ Punkten, in deren jedem ein Paar Gegenseiten eines in eine Curve II. Ordnung beschriebenen $(4n+2)$ Ecks sich schneiden, n in einer und derselben Geraden h liegen, so liegt auch der letzte in dieser Geraden.

Wenn von den $n+1$ Diagonalen, deren jede ein Paar Gegenpunkte eines um eine Curve II. Ordnung beschriebenen $(4n+2)$ Seits verbindet, n in einem und demselben Punkte sich schneiden, so geht auch die letzte durch diesen Punkt.

Man nehme an, dass die Punkte, in welchen die vier Seiten AB_1, B_1C, CD_1, D_1E eines in eine Curve II. Ordnung beschriebenen Zehnecks $AB_1CD_1EA_1BC_1DE_1$ von den ihnen gegenüberliegenden Seiten geschnitten werden, in einer und derselben Geraden h liegen. Bezieht man nun zwei Systeme collineär so aufeinander, dass sie die Curve entsprechend gemein haben, und dass den Punkten A, B, C des einen Systems die Punkte A_1, B_1, C_1 des andern entsprechen, so entsprechen auch (276) den Punkten D, E des erstern die Punkte D_1, E_1 des letztern, daher auch der Schnittpunkt der Seiten EA_1, E_1A in der Geraden h liegt.

278. Werden die Elemente einer Curve II. Ordnung s involutorisch gepaart, so dass nämlich die Geraden AA_1, BB_1, CC_1 u. s. w., deren jede zwei einander zugeordnete Punkte der Curve verbindet, alle in einem und demselben Punkte H sich schneiden und also die Punkte aa_1, bb_1, cc_1 u. s. w., in deren jedem zwei einander zugeordnete Tangenten der Curve sich schneiden, alle in einer und derselben Geraden h liegen, so wird (276) jede Involution $AA_1.BB_1.CC_1$ von drei Paar Punkten der Curve aus

jedem in ihr befindlichen Punkte durch eine Involution von drei Paar Strahlen projicirt und jede Involution $a a_1 . b b_1 . c c_1$ von drei Paar Tangenten der Curve von jeder Tangente derselben in einer Involution von drei Paar Punkten geschnitten.

Wenn die Gerade h die Curve in zwei Punkten P, Q schneidet, so heissen in der Curve je zwei einander zugeordnete Punkte durch die Punkte P, Q und in dem der Curve sich anschmiegenden Strahlenbüschel je zwei einander zugeordnete Strahlen durch die Strahlen HP, HQ harmonisch getrennt. Im erstern Gebilde vertritt jeder von den beiden Punkten P, Q, im letztern aber jeder von den beiden Strahlen die Stelle eines Paares.

Sind also die Diagonalen eines in eine Curve II. Ordnung beschriebenen Vierecks einander conjugirt, so liegen in der Curve die vier Eckpunkte des Vierecks, die Tangenten an diesen Punkten aber in dem der Curve sich anschmiegenden Strahlenbüschel harmonisch. Die vier Eckpunkte des Vierecks werden aus jedem Punkte der Curve durch einen harmonischen Strahlenbüschel projicirt, die vier erwähnten Tangenten aber von jeder Tangente der Curve in einem harmonischen geraden Gebilde geschnitten.

279. Durch ein vollständiges Viereck sind (262) drei Curven II. Ordnung bestimmt, deren jede durch die vier Eckpunkte des Vierecks geht und in jedem dieser Punkte von einer Geraden berührt wird, welche mit den drei durch denselben Eckpunkt gehenden Seiten einen harmonischen Strahlenbüschel bildet. Jeder Punkt, aus welchem die Eckpunkte des Vierecks durch vier harmonisch liegende Strahlen projicirt werden, liegt in einer der drei Curven.

Durch ein vollständiges Vierseit sind drei Curven II. Ordnung bestimmt, deren jede Seite des Vierseits in einem Punkte berührt, welcher mit den in derselben Seite befindlichen Eckpunkten harmonisch liegt. Jede Gerade, welche die vier Seiten des Vierseits in vier harmonisch liegenden Punkten schneidet, berührt eine von den drei Curven.

280. Durch eine Curve II. Ordnung s und zwei Punkte H, P, von welchen der letztere weder

Durch eine Curve II. Ordnung s und zwei Gerade h, p, von welchen die letztere weder die

in der Curve noch in der Polare des erstern noch mit dem erstern in einer und derselben Tangente der Curve liegt, ist eine andere Curve II. Ordnung k bestimmt, welche durch den letztern Punkt geht und die Bedingung erfüllt, dass der Pol einer jeden durch den erstern Punkt gehenden Geraden in Hinsicht auf beide Curven derselbe sey.

Curve berührt noch durch den Pol der erstern geht, noch die erstere in einem Punkte der Curve schneidet, ist eine andere Curve II. Ordnung k bestimmt, welche die letztere Gerade berührt und die Bedingung erfüllt, dass die Polare eines jeden in der erstern Geraden befindlichen Punktes in Hinsicht auf beide Curven dieselbe sey.

Durch die Curve s und die Gerade h ist auch der Pol H dieser Geraden und umgekehrt durch die Curve s und den Punkt H die Polare h dieses Punktes gegeben. Da nun das gerade Gebilde h und der Strahlenbüschel H eben so, wie sie in Hinsicht auf die Curve s einander zugeordnet sind, auch in Hinsicht auf die Curve k einander zugeordnet seyn sollen, die im Punkte P dieser Curve sich anschmiegende Gerade p durch den Pol der Geraden PH gehen und umgekehrt der Berührungspunkt der Tangente p in der Polare des Punktes p h liegen muss, mithin durch jedes von den beiden Elementen das andere bestimmt ist, so folgt der Satz aus 240.

In jeder Geraden, welche die eine von den beiden Curven in einem Punkte berührt und die andere in zwei Punkten schneidet, sind diese Punkte durch jenen Punkt und durch die Spur der Geraden h harmonisch getrennt. Schneidet eine Gerade die Gerade h im Punkte F, die eine Curve in den Punkten A, A_1 und die andere in den Punkten G, G_1, so ist $F.AA_1.GG_1$ eine Involution. Der Punkt, in welchem jene Gerade von der Po-

Die Schenkel eines jeden Winkels, welcher um die eine von den beiden Curven beschrieben ist und seinen Mittelpunkt in der andern hat, sind durch die Gerade, welche in diesem Punkte die andere berührt, und durch die Gerade, welche aus demselben Punkte den Punkt H projicirt, harmonisch getrennt. Schneiden sich zwei Tangenten a, a_1 der einen Curve und zwei Tangenten g, g_1 der andern Curve in einem und demselben

lare des Punkes F geschnitten wird, ist nämlich von diesem sowohl durch die Punkte A, A_1 als auch durch die Punkte G, G_1 harmonisch getrennt.

Punkte, so ist, wenn die Gerade, welche aus diesem Punkte den Punkt H projicirt, durch f bezeichnet wird, $f.aa_1.gg_1$ eine Involution.

Es folgt hieraus ferner, dass die beiden Curven keinen ausserhalb der Geraden h befindlichen Punkt und also entweder gar keinen oder nur einen Punkt oder zwei Punkte mit einander gemein haben, je nachdem sie den Punkt H einschliessen oder in diesem Punkte die Gerade h berühren oder von dieser Geraden geschnitten werden, und dass im ersten so wie auch (274) im zweiten Falle die eine Curve von der andern eingeschlossen ist, im dritten Falle aber in ihren gemeinschaftlichen Punkten entweder die eine die andere von innen oder jede die andere von aussen berührt, je nachdem sie in einen und denselben oder nicht in einen und denselben von den beiden Winkeln beschrieben sind, welche ihre gemeinschaftlichen Tangenten mit einander bilden.

281. Wenn zwei collineäre ebene Systeme eine Curve II. Ordnung s aber nicht alle ihre Punkte entsprechend gemein haben und auch nicht involutorisch liegen, so berühren die Geraden AA_1, BB_1, CC_1 u. s. w., deren jede ein Paar homologe Punkte der Curve s verbindet, eine andere Curve II. Ordnung k, während die Punkte aa_1, bb_1, cc_1 u. s. w., in deren jedem ein Paar homologe Tangenten der Curve s sich schneiden, in einer dritten Curve II. Ordnung liegen, welche in Hinsicht auf die Curve s dem der Curve k sich anschmiegenden Strahlenbüschel zugeordnet ist.

Nach dem vorigen Satze ist durch die Curve s, durch die in 276 erwähnte Gerade h und die Gerade AA_1 eine Curve II. Ordnung k bestimmt, welche die letztere Gerade berührt und die Bedingung erfüllt, dass die Polare eines jeden in der erstern befindlichen Punktes in Hinsicht auf beide Curven dieselbe sey. Um sich nun zu überzeugen, dass die Curve k auch von jeder andern Geraden BB_1, welche ein Paar homologe Punkte der Curve s verbindet, berührt werde, darf man nur bemerken, dass (251) der Punkt L, in welchem die Gerade h von den Geraden AB_1, A_1B geschnitten wird, der Pol der Geraden ist, welche den

Schnittpunkt M von AA_1 und BB_1 mit dem Schnittpunkte N von AB und A_1B_1 verbindet, und dass die einander conjugirten Geraden ML, MN durch die Geraden AA_1, BB_1 harmonisch getrennt sind.

282. Wenn die Eckpunkte eines Dreiecks in einer gegebenen Curve II. Ordnung sich bewegen, während zwei Seiten um zwei Punkte sich drehen, welche in Hinsicht auf die Curve einander conjugirt sind, so dreht sich (253) die dritte Seite um den Pol der Geraden, welche die beiden erstern Punkte verbindet.

283. Wenn die Eckpunkte eines n Ecks $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ in einer gegebenen Curve II. Ordnung liegen und $n-1$ Seiten desselben durch gegebene Punkte gehen, von welchen keiner in der Curve liegt, so geht die letzte Seite entweder ebenfalls durch einen gegebenen Punkt oder sie berührt eine gegebene Curve II. Ordnung.

Wenn die drei Seiten eines Dreiecks eine gegebene Curve II. Ordnung berühren und zwei Eckpunkte desselben in zwei gegebenen Geraden liegen, welche in Hinsicht auf die Curve einander conjugirt sind, so liegt der dritte Eckpunkt in der Polare des Punktes, in welchem die beiden erstern Geraden sich schneiden.

Wenn die Seiten eines n Ecks eine gegebene Curve II. Ordnung berühren, und $n-1$ Eckpunkte desselben in gegebenen Geraden liegen, von welchen keine die Curve berührt, so liegt der letzte Eckpunkt entweder ebenfalls in einer gegebenen Geraden oder in einer gegebenen Curve II. Ordnung.

Die Punkte $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$ sind nämlich homologe Punkte von n collineären Systemen, welche die gegebene Curve entsprechend gemein haben, und von welchen je zwei aufeinander folgende involutorisch liegen. Wenn nun auch das erste und letzte involutorisch liegen, so geht die Gerade A_nA_1 durch einen gegebenen Punkt. Ist aber diess nicht der Fall, so berührt (281) die Gerade A_nA_1 eine gegebene Curve II. Ordnung.

§. 21.

Von der Anzahl der gemeinschaftlichen Punkte und Tangenten zweier Curven II. Ordnung.

284. Zwei Curven II. Ordnung haben (258) höchstens vier Punkte, die ihnen sich anschmiegenden Strahlenbüschel höchstens vier Strahlen mit einander gemein. Berühren zwei Curven II. Ordnung eine Gerade in einem und demselben Punkte, so haben sie höchstens noch zwei Punkte mit einander gemein und höchstens noch zwei gemeinschaftliche Tangenten. Berühren zwei Curven II. Ordnung zwei Gerade in denselben zwei Punkten, so haben sie weder einen dritten Punkt mit einander gemein noch eine dritte gemeinschaftliche Tangente.

Wenn zwei Curven II. Ordnung, welche zwei Gerade in denselben zwei Punkten berühren, perspektivisch so aufeinander bezogen werden, dass je zwei homologe Tangenten die eine gemeinschaftliche Tangente in einem und demselben Punkte schneiden, so liegen je zwei homologe Punkte mit dem Berührungspunkte der andern in einer und derselben Geraden. Da nämlich die andere gemeinschaftliche Tangente und also auch ihr Berührungspunkt sich selbst entspricht, so muss dieser Punkt das Projektionscentrum der zu einander perspektivischen Systeme seyn. Es folgt daher auch aus 271, dass in ihren gemeinschaftlichen Punkten entweder die eine von den beiden Curven die andere von innen oder jede die andere von aussen berührt, je nachdem sie nämlich in einen und denselben oder nicht in einen und denselben von den beiden Winkeln beschrieben sind, welche ihre gemeinschaftlichen Tangenten mit einander bilden.

285. Die Anzahl m der gemeinschaftlichen Punkte zweier Curven s, k II. Ordnung, welche in einerlei Ebene liegen, ist eine pare oder unpare Zahl, je nachdem die Anzahl n ihrer gemeinschaftlichen Tangenten eine pare oder unpare Zahl ist.

Es sey r die Anzahl der Punkte, in welchen die Curven sich berühren, so ist $m-r$ die Anzahl ihrer Schnittpunkte und $n-r$ die Anzahl derjenigen gemeinschaftlichen Tangenten, deren jede die Curven entweder in zwei verschiedenen Punkten oder in einem Schnittpunkte berührt. Bemerkt man nun, dass das System

von allen in der Ebene befindlichen Geraden durch den Strahlenbüschel s in zwei Systeme getheilt wird, und dass eine Gerade, welche den Strahlenbüschel k beschreibt, in jeder der erwähnten n — r Tangenten von einem der beiden Systeme in das andere übergeht, so folgt, dass n — r eine pare Zahl sey, gleich wie m — r eine pare Zahl ist. Es sind also m, n, r entweder drei pare oder drei impare Zahlen.

286. Versteht man unter einem nEcke eine von n Strecken eingeschlossene Figur, so heisst ein nEck in eine Curve II. Ordnung oder auch diese um das nEck beschrieben, wenn das nEck von der Curve eingeschlossen ist und alle seine Eckpunkte in derselben liegen. Umgekehrt heisst eine Curve II. Ordnung in ein nEck oder auch das nEck um die Curve beschrieben, wenn diese alle Seiten des nEcks berührt, und also in dem nEcke liegt. Jedes nEck, welches in oder um eine Curve II. Ordnung beschrieben ist, hat lauter ausspringende Winkel.

287. Wenn zwei Curven II. Ordnung s, k vier gemeinschaftliche Tangenten a, b, c, d haben, so schneiden sie sich entweder in vier Punkten oder sie haben gar keinen Punkt mit einander gemein.

Wenn zwei Curven II. Ordnung in vier Punkten sich schneiden, so haben sie entweder vier gemeinschaftliche Tangenten oder gar keine gemeinschaftliche Tangente.

Durch die Geraden a, b, c, d wird die Ebene in drei Vierecke und vier Dreiecke getheilt. Sind nun die Curven s, k in ein und dasselbe Viereck beschrieben, so müssen sie sich in vier Punkten schneiden. Sind aber die Curven nicht in ein und dasselbe Viereck beschrieben, so haben sie keinen Punkt mit einander gemein.

Zwei Curven II. Ordnung, welche vier gemeinschaftliche Tangenten haben, berühren (284) keine dieser Geraden in einem und demselben Punkte. Eben so werden zwei Curven II. Ordnung, welche vier Punkte mit einander gemein haben, in keinem dieser Punkte von einer und derselben Geraden berührt.

288. Haben zwei Curven II. Ordnung s, k keinen Punkt mit einander gemein, so haben sie

Haben zwei Curven II. Ordnung keine gemeinschaftliche Tangente, so haben sie entwe-

entweder auch keine gemeinschaftliche Tangente oder vier gemeinschaftliche Tangenten.

der auch keinen Punkt mit einander gemein oder sie schneiden sich in vier Punkten.

Es kommt hier nur darauf an, ob die eine oder keine von den beiden Curven s, k die andere einschliesst. Im letztern Falle wird das System von allen in der Ebene befindlichen Geraden durch die beiden Strahlenbüschel s, k in fünf Systeme getheilt.

289. Wenn zwei Curven II. Ordnung s, k drei gemeinschaftliche Tangenten haben, so haben sie entweder (285) auch drei Punkte oder nur einen Punkt mit einander gemein.

Wenn zwei Curven II. Ordnung drei Punkte mit einander gemein haben, so haben sie entweder auch drei gemeinschaftliche Tangenten oder nur eine gemeinschaftliche Tangente.

Da die Anzahl der Punkte, welche die Curven s, k mit einander gemein haben, eine unpare Zahl ist, so müssen sie in einem Punkte sich berühren. Sind nun die beiden Curven in ein und dasselbe von den vier Dreiecken beschrieben, welche ihre gemeinschaftlichen Tangenten mit einander bilden, so schneiden sie sich in zwei Punkten. Sind aber die Curven nicht in ein und dasselbe Dreieck beschrieben, so haben sie nur jenen Punkt mit einander gemein.

290. Haben zwei Curven II. Ordnung zwei Punkte mit einander gemein, so haben sie auch nach 285, 287 und 288 zwei gemeinschaftliche Tangenten, und umgekehrt. Sind nun die Curven in einen und denselben von den beiden Winkeln beschrieben, welche ihre gemeinschaftlichen Tangenten mit einander bilden, so muss entweder die eine die andere in zwei Punkten von innen berühren oder sie müssen sich in zwei Punkten schneiden. Im letztern Falle kann man ferner unterscheiden, ob die Curven jede ihrer gemeinschaftlichen Tangenten in zwei verschiedenen Punkten oder ob sie die eine in einem ihrer Schnittpunkte berühren. Sind die Curven nicht in einen und denselben Winkel beschrieben, so berühren sie sich in zwei Punkten von aussen.

291. Nach 285 und 290 ist die Anzahl m der gemeinschaftlichen Punkte zweier Curven II. Ordnung, welche nämlich in einerlei Ebene liegen, entweder der Anzahl n ihrer gemein-

schaftlichen Tangenten gleich, oder es ist die Summe dieser beiden Zahlen $= 4$ oder es findet beides zugleich statt. Ist $m = n = 3$ oder $m = n = 1$, so berührt die eine von den beiden Curven die andere in einem Punkte von innen. Ist aber $m = 3$ und $n = 1$ oder $m = 1$ und $n = 3$, so berühren sich die Curven in einem Punkte von aussen.

292. Wenn von einer Curve II. Ordnung s fünf Punkte A, B, C, D, E und von einer andern Curve II. Ordnung k, welche durch die drei ersten Punkte, aber durch keinen der beiden übrigen geht, ebenfalls noch zwei Punkte D_1, E_1 gegeben sind, so kann man leicht finden, ob die Curven in einem ihrer gemeinschaftlichen Punkte sich berühren, oder in welchem vierten Punkte sie sich schneiden.

Man suche in der Curve s zuerst den Punkt D_2, so dass $E(ABCD_2) \pi E_1(ABCD_1)$ ist, und alsdann den Punkt F, welcher aus dem Punkte D_2 durch die Gerade D_2D_1 projicirt ist. Da nun (255) $F(ABCD_2) \pi E(ABCD_2)$ und mithin auch $F(ABCD_1) \pi E_1(ABCD_1)$ ist, so folgt (256), dass der Punkt F auch in der Curve k liegt, und dass also dieser Punkt, wenn er mit keinem der drei Punkte A, B, C zusammenfällt, der vierte Schnittpunkt der beiden Curven ist. Fällt aber der Punkt F etwa mit dem Punkte A zusammen, so folgt auf dieselbe Weise, dass alsdann die Gerade, welche die Curve s im Punkte A berührt, in demselben Punkte auch die Curve k berühre.

293. Werden zwei vollständige Vierecke $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$ angenommen, so dass jeder Punkt, in welchem ein Paar Gegenseiten des einen Vierecks sich schneiden, auch der Schnittpunkt von zwei solchen Seiten des andern ist, so haben die beiden Vierecke entweder zwei Seiten mit einander gemein, oder es liegen ihre acht Eckpunkte in einer Curve II. Ordnung.

Werden zwei vollständige Vierseite angenommen, so dass jede Gerade, welche ein Paar Gegenpunkte des einen Vierseits verbindet, auch durch zwei solche Punkte des andern geht, so haben die beiden Vierseite entweder ein Paar Gegenpunkte mit einander gemein, oder es berühren ihre acht Seiten eine Curve II. Ordnung.

Es sey M der Schnittpunkt von AB und CD, N der Schnitt-

punkt von AC und BD und R der Schnittpunkt von AD und BC. Wenn nun etwa der Punkt A_1 in der Geraden AB liegt, und A_1B_1 diejenige Seite des zweiten Vierecks ist, welche durch den Punkt M geht, so fällt diese Seite mit der Seite AB und folglich, da alsdann diese Gerade durch die Geraden MN, MR sowohl von CD als auch von C_1D_1 harmonisch getrennt ist, auch die Seite CD mit der Seite C_1D_1 zusammen. Lässt sich aber durch die fünf Punkte A, B, C, D, A_1 eine Curve II. Ordnung legen, so geht diese, da die Punkte A_1, B_1 durch den Punkt M und den Schnittpunkt von A_1B_1 und NR harmonisch getrennt und die letztern Punkte (251) einander conjugirt sind, auch durch den Punkt B_1 und eben so durch die Punkte C_1, D_1. Es ergeben sich hieraus und aus 251 noch folgende Sätze:

Haben zwei Curven II. Ordnung vier gemeinschaftliche Tangenten, so liegen die acht Berührungspunkte dieser Tangenten entweder in einer dritten Curve II. Ordnung oder in zwei Geraden. Der letztere Fall kann vorkommen, wenn die Curven sich nicht schneiden.

Schneiden sich zwei Curven II. Ordnung in vier Punkten, so berühren die acht Geraden, deren jede eine von den beiden Curven in einem jener Punkte berührt, entweder eine dritte Curve II. Ordnung, oder es schneiden sich vier in einem Punkte und die vier übrigen in einem andern Punkte.

294. Zwei collineäre Systeme, welche in einerlei Ebene, aber nicht perspektivisch liegen, haben entweder die drei Eckpunkte und die drei Seiten eines Dreiecks oder nur zwei Punkte und zwei Gerade, von welchen die eine durch beide Punkte, die andern aber durch einen derselben geht, oder nur einen Punkt und eine Gerade entsprechend gemein.

Es entspreche dem Punkte A des einen Systems der Punkt A_1 des andern, so entspricht der Geraden AA_1 des erstern Systems eine durch den Punkt A_1 gehende Gerade u des andern. Wenn nun, was man annehmen kann, diese Linien nicht in einander fallen, so erzeugen (256) die Strahlenbüschel A, A_1 eine Curve II. Ordnung k, welche offenbar durch jeden Punkt geht, welchen die collineären Systeme entsprechend gemein haben. Der Curve k des erstern Systems entspricht ferner eine Curve k_1 des

andern, welche die Gerade u und die Curve k im Punkte A_1 schneiden muss, weil diese die Gerade AA_1 im Punkte A schneidet und die Gerade u im Punkte A_1 berührt. Da endlich je zwei homologe Punkte der beiden Curven aus dem Punkte A_1 durch einen und denselben Strahl projicirt werden, so folgt:

I. Wenn die beiden Curven in noch drei Punkten P, Q, R sich schneiden, so haben die collineären Systeme die Eckpunkte und also auch die Seiten des Dreiecks PQR entsprechend gemein.

II. Wenn die Curven nur noch in einem Punkte P sich schneiden, in einem Punkte Q aber sich berühren, so haben die Systeme zwei Punkte P, Q und zwei Gerade PQ, von welchen nämlich die letztere die Curven im Punkte Q berührt, entsprechend gemein.

III. Wenn die Curven nur noch in einem Punkte P sich schneiden und in diesem Punkte von einer und derselben Geraden p berührt werden, so haben die Systeme nur den Punkt P und die durch ihn gehende Gerade p entsprechend gemein. — Dass keine durch den Punkt P gehende, von p verschiedene Gerade PB mit der ihr entsprechenden Geraden PB_1 zusammenfällt, geht daraus hervor, weil je zwei homologe Punkte B, B_1 der Curven aus dem Punkte A_1 durch eine und dieselbe Gerade projicirt werden. Eine Gerade q aber, welche nicht durch den Punkt P geht, kann desshalb sich nicht selbst entsprechen, weil der Punkt pq sich nicht selbst entspricht.

IV. Wenn die Curven nur noch einen Punkt P gemein haben, in diesem Punkte aber nicht von einer und derselben Geraden berührt werden, so haben die Systeme nur den Punkt P und eine nicht durch ihn gehende Gerade entsprechend gemein. — Nach dem, was in III bemerkt wurde, haben die Systeme weder eine durch den Punkt P gehende Gerade noch mehr als eine Gerade entsprechend gemein. Um sich aber zu überzeugen, dass es eine Gerade giebt, welche sich selbst entspricht, darf man nur zwei homologe gerade Gebilde c, c_1 betrachten, welche im Punkte P sich schneiden und also Schnitte eines und desselben Strahlenbüschels S sind. Wenn nun dem Punkte S des einen Systems der Punkt S_1 des andern entspricht und die Gerade SS_1 die Geraden c, c_1 in den Punkten C, C_1 schneidet, so entspricht die

Gerade S_1C_1 der Geraden SC, also sich selbst. Eben so leicht findet man, wenn eine Gerade gegeben ist, welche die Systeme entsprechend gemein haben, einen sich selbst entsprechenden Punkt.

295. Wenn man in einer Ebene zwei Polarsysteme annimmt und je zwei Punkte V_1, V_2 der Ebene, welche von einer und derselben Geraden V die Pole in Hinsicht auf jene Systeme sind, einander entsprechend nennt, so hat man offenbar drei Systeme Σ, Σ_1, Σ_2 projektivisch so aufeinander bezogen, dass die beiden letztern dem erstern reciprok, also unter sich collineär sind und mithin entweder einen Strahlenbüschel S und ein durch seinen Mittelpunkt gehendes gerades Gebilde u, oder einen Strahlenbüschel S und ein nicht durch seinen Mittelpunkt gehendes gerades Gebilde u, oder nur die Eckpunkte und Seiten eines Dreiecks PQR, oder nur zwei Punkte P, Q und zwei Gerade PQ, p, welche im Punkte Q sich schneiden, oder nur einen Punkt P und eine durch ihn gehende Gerade p, oder nur einen Punkt P und eine nicht durch ihn gehende Gerade p entsprechend gemein haben.

Im ersten Falle berühren sich die Ordnungscurven s, k der Polarsysteme im Punkte S so innig, dass der Pol einer jeden durch den Punkt S gehenden Geraden in Hinsicht auf beide derselbe ist.

Im zweiten Falle haben die Polarsysteme unendlich viele Polardreiecke mit einander gemein. Die Curven s, k berühren sich (280) entweder in zwei Punkten, oder sie haben gar keinen Punkt mit einander gemein.

Im dritten Falle haben die Polarsysteme nur das Polardreieck PQR mit einander gemein. Die Curven s, k schneiden sich entweder in vier Punkten oder haben gar keinen Punkt mit einander gemein. Gehen nämlich beide Curven durch den Punkt A, so muss dieser, wenn nicht der zweite Fall Statt finden soll, ausserhalb der drei Geraden PQ, PR, QR liegen. Sucht man nun zu dem Punkte P, A und dem Schnittpunkte von PA und QR den vierten harmonischen Punkt B, so hat man noch einen gemeinschaftlichen Punkt der beiden Curven. Eben so kann man aber in jeder von den beiden Geraden QA, RA einen Punkt finden, in welchem die Curven sich schneiden.

Im vierten Falle berühren sich die Curven s, k im Punkte Q, so dass es aber nur noch einen Punkt P giebt, dessen Polare p in Hinsicht auf beide Polarsysteme dieselbe ist, daher die Curven entweder nur den Punkt Q oder noch zwei Punkte mit einander gemein haben, in welchen sie sich schneiden.

Im fünften Falle schneiden sich (274) die Curven s, k in dem Punkte P, in welchem beide von der Geraden p berührt werden, und also noch in einem andern Punkte.

Im sechsten Falle, in welchem es auch nur einen Punkt P giebt, dessen Polare p in Hinsicht auf beide Polarsysteme dieselbe ist, diese Gerade aber nicht durch jenen Punkt geht, haben die Curven s, k zwei Punkte mit einander gemein, so dass aber in keinem dieser Punkte beide von einer und derselben Geraden berührt werden. Da es nämlich in der Geraden p keine zwei Punkte giebt, welche in Hinsicht auf jedes der beiden Polarsysteme einander conjugirt sind, so schneiden sich (309) die Curve s und die Gerade p in zwei Punkten, die durch die Punkte, in welchen dieselbe Gerade von der Curve k geschnitten wird, getrennt sind, daher auch die beiden Curven sich schneiden müssen. Würden sie sich in vier Punkten schneiden, so hätten (251) die Polarsysteme ein Polardreieck mit einander gemein.

Wenn ein ebenes Polarsystem keine Ordnungscurve hat, so sagt man, dass seine Ordnungscurve imaginär sey. Ist also irgend eine von den beiden Curven s, k imaginär, so muss entweder der zweite oder dritte von den obigen Fällen Statt finden.

---

§. 22.

Von den Linien II. Ordnung überhaupt.

296. Unter einer Linie II. Ordnung versteht man entweder eine Curve II. Ordnung oder den Inbegriff von zwei in einerlei Ebene liegenden Geraden. Das Reciproke hievon ist in der Ebene ein Strahlenbüschel II. Ordnung, welcher nämlich entweder einer Curve II. Ordnung sich anschmiegt, oder der Inbegriff von zwei Strahlenbüscheln I. Ordnung ist.

Durch zwei zu einander projektivische Strahlenbüschel, welche in einerlei Ebene liegen, aber nicht concentrisch sind, ist eine Linie II. Ordnung bestimmt, der nämlich jeder Punkt angehört, welchen ein Strahl des einen Büschels mit dem homologen Strahle des andern gemein hat. Liegen die Strahlenbüschel perspektivisch, so besteht die Linie II. Ordnung aus zwei Geraden, von welchen die eine die Mittelpunkte der beiden Büschel verbindet.

Durch zwei zu einander projektivische gerade Gebilde, welche sich schneiden, ist ein Strahlenbüschel II. Ordnung bestimmt, dem jeder Strahl angehört, welcher durch einen Punkt des einen Gebildes und zugleich durch den homologen Punkt des andern geht. Liegen die geraden Gebilde perspektivisch, so ist der Strahlenbüschel II. Ordnung der Inbegriff von zwei Strahlenbüscheln I. Ordnung, von welchen der eine den Schnittpunkt der geraden Gebilde zum Mittelpunkt hat.

297. Wenn in einer Ebene zwei Dreiecke perspektivisch liegen, aber weder einen Eckpunkt noch eine Seite mit einander gemein haben, so liegen (250) die Punkte, in deren jedem zwei nicht homologe Seiten der beiden Dreiecke sich schneiden, in einer Linie II. Ordnung s und die Geraden, deren jede zwei nicht homologe Eckpunkte der beiden Dreiecke verbindet, in einem Strahlenbüschel II. Ordnung s_1, welcher in dem (241) durch die beiden Dreiecke bestimmten Polarsysteme jener Linie zugeordnet ist.

Liegt ein Eckpunkt des einen Dreiecks in einer Seite des andern, so wird diese Gerade in jenem Punkte sowohl von den Curven s, s_1 als auch von der Ordnungscurve des erwähnten Polarsystems berührt. Ist das eine von den beiden Dreiecken in das andere beschrieben, so fallen die drei Curven in einander.

298. Jedem einer Curve II. Ordnung einbeschriebenen vollständigen Vierecke ABCD ist ein um dieselbe beschriebenes vollständiges Vierseit zugeordnet.

Je zwei Gegenpunkte des vollständigen Vierseits liegen mit den vier Eckpunkten des Vierecks in einer Linie II. Ordnung.

Je zwei Gegenseiten des vollständigen Vierecks liegen mit den vier Seiten des Vierseits in einem Strahlenbüschel II. Ordnung.

Es seyen E, F die Pole der Geraden AB, CD, so liegen (251) die drei Punkte, in deren jedem ein Paar Gegenseiten des Sechsecks AEBCFD sich schneiden, in einer und derselben Geraden, woraus (259) der Satz folgt.

299. Wenn man in einer Ebene ein vollständiges Viereck ABCD und eine Gerade d annimmt, welche durch keinen Eckpunkt desselben geht, und je zwei Punkte P, P_1 der Geraden d, welche mit den vier Eckpunkten des Vierecks in einer Linie II. Ordnung liegen, einander zugeordnet nennt, so sind die Elemente des geraden Gebildes d involutorisch gepaart.

Wenn man in einer Ebene ein vollständiges Vierseit abcd und einen Punkt D annimmt, welcher in keiner Seite desselben liegt, und je zwei Strahlen des Strahlenbüschels D, welche mit den vier Seiten des Vierseits in einem Strahlenbüschel II. Ordnung liegen, einander zugeordnet nennt, so sind die Elemente des Büschels D involutorisch gepaart.

Es werde die Gerade AB von der Geraden d oder PP_1 im Punkte G und von der Geraden PD im Punkte H geschnitten, so ist (119) $ABGH \barwedge BAHG \barwedge P(BADP_1)$. Da aber nach der Annahme $P(BADP_1) \barwedge C(BADP_1)$ ist, so ist auch $ABGH \barwedge C(BADP_1)$, woraus hervorgeht, dass in dem Polarsysteme, in welchem (237) die Eckpunkte A, B, C des Dreiecks ABC die Pole der ihnen gegenüberliegenden Seiten a, b, c sind, und dem Punkte D die Gerade d, folglich dem Punkte G oder cd die Gerade CD zugeordnet ist, der Punkt H der Pol der Geraden CP_1, mithin der Punkt P_1, in welchem diese Gerade von der Geraden d geschnitten wird, der Pol der Geraden HD oder DP ist, und dass also P, P_1 conjugirte Punkte und DP_1, DP conjugirte Gerade des erwähnten Polarsystems sind. Der Linie II. Ordnung s, welche durch die Punkte A, B, C, D, P, P_1 geht, ist ein Strahlenbüschel II. Ordnung s_1 zugeordnet, welchem die Geraden a, b, c, d, DP_1, DP angehören. Es bieten sich hier noch folgende Bemerkungen dar:

I. Wenn der Punkt P in einer Seite des vollständigen Vierecks ABCD liegt, so liegt der Punkt P_1 in der gegenüberliegenden Seite, so dass alsdann die Linie s der Inbegriff von zwei

Geraden und der Strahlenbüschel s_1 der Inbegriff von zwei Büscheln erster Ordnung ist.

II. Wenn die Gerade d von den sechs Seiten des vollständigen Vierecks ABCD nur in vier Punkten geschnitten wird, oder zwei einander zugeordnete Schnittpunkte durch zwei andere solche Punkte getrennt sind, so giebt es keine Curve II. Ordnung, welche durch die vier Punkte A, B, C, D geht und die Gerade d berührt, und eben so keine Curve II. Ordnung, welche die vier Geraden a, b, c, d berührt und durch den Punkt D geht. Im erstern Falle besteht nämlich jede Linie II. Ordnung, welche durch die Punkte A, B, C, D und einen Ordnungspunkt des involutorischen geraden Gebildes d geht, also mit dieser Geraden nur einen Punkt gemein hat, aus zwei Geraden. Im letztern Falle aber enthält das involutorische Gebilde keinen sich selbst zugeordneten Punkt.

III. Schneidet die Gerade d zwei Seiten AB, CD des vollständigen Vierecks ABCD in einem und demselben Punkte, die übrigen Seiten aber in vier verschiedenen Punkten, so giebt es eine Curve II. Ordnung s, welche durch die vier Punkte A, B, C, D geht und die Gerade d berührt, und eben so eine Curve II. Ordnung s_1, welche die vier Geraden a, b, c, d berührt und durch den Punkt D geht Der Berührungspunkt N der Curve s mit der Geraden d liegt in der Geraden, welche den Schnittpunkt von AC und BD mit dem Schnittpunkte von AD und BC verbindet. Die Curve s_1 wird im Punkte D von der Geraden DN berührt.

IV. Wenn das involutorische Gebilde d zwei Ordnungspunkte enthält, aber in keinem derselben zwei Seiten des Vierecks ABCD schneidet, so sind die Punkte A, B, C, D die Schnittpunkte von zwei Curven II. Ordnung, welche die Gerade d berühren, und die Geraden a, b, c, d die gemeinschaftlichen Tangenten von zwei Curven, welche durch den Punkt D gehen.

300. Wenn von zwei Dreiecken ABC, DPP_1, welche weder einen Eckpunkt noch eine Seite mit einander gemein haben, irgend eine von folgenden drei Aussagen gilt, so gelten auch nach dem Beweise des vorigen Satzes die beiden übrigen.

I. Die sechs Eckpunkte der Dreiecke liegen in einer Linie II. Ordnung.

II. Die sechs Seiten der Dreiecke gehören einem Strahlenbüschel II. Ordnung an.

III. Die Dreiecke sind (absolute) Polardreiecke eines und desselben Polarsystems.

301. Die in 299 enthaltenen Sätze lassen sich, wenn man nicht auf die letztern Rücksicht nehmen will, noch etwas kürzer beweisen. Liegen nämlich die Punkte A, B, C, D, P, P_1 in einer Curve II. Ordnung, so ist A $(PP_1CD) \pi$ B (PP_1CD). Bezeichnet man also die Punkte, in welchen die Gerade PP_1 von den Geraden AC, AD, BC, BD geschnitten wird, durch Q, R, R_1, Q_1, so ist $PP_1QR \pi PP_1R_1Q_1$, also auch $PP_1QR \pi P_1PQ_1R_1$ und mithin $PP_1 . QQ_1 . RR_1$ eine Involution.

Lässt man den Punkt D der Curve mit dem Punkte A zusammenfallen, so dass AD in eine Tangente übergeht, so wird die Gerade PP_1 in den Punkten Q, Q_1 von zwei Seiten des Dreiecks ABC, im Punkte R von der Geraden, welche die Curve im Schnittpunkte dieser Seiten berührt, und im Punkte R_1 von der dritten Seite geschnitten. Fällt überdiess C mit B und also auch Q mit Q_1 zusammen, so sind in der Geraden PP_1 die Punkte R, R_1 die Spuren von zwei Tangenten, deren Berührungspunkte mit dem Punkte Q in einer und derselben Geraden liegen.

302. Wenn zwei Punkte P, P_1 durch je zwei Gegenseiten eines Vierecks ABCD harmonisch getrennt sind, so sind sie in Hinsicht auf jede Curve II. Ordnung, welche durch die vier Eckpunkte des Vierecks geht, einander conjugirt, daher sie auch in Hinsicht auf das Viereck einander conjugirt heissen sollen.

Wenn zwei Gerade durch je zwei Gegenpunkte eines Vierseits harmonisch getrennt sind, so sind sie in Hinsicht auf jede Curve II. Ordnung, welche die vier Seiten des Vierseits berührt, einander conjugirt, daher sie auch in Hinsicht auf das Vierseit einander conjugirt heissen sollen.

Es sey M der Schnittpunkt von AB und CD, N der von AD und BC und S der von AC und BD, so sind die Geraden

NA, NB sowohl durch die Geraden NM, NS als auch durch die Geraden NP, NP_1 harmonisch getrennt, daher N (ABMP) $\overline{\wedge}$ N (ABSP_1) ist. Wenn also die Gerade MP von den Geraden NA, NB in den Punkten a, b und die Gerade MP_1 von den Geraden NA, NB, NS in den Punkten d, c, e geschnitten wird, so ist auch ab$MP \wedge dce P_1$. Da nun die Geraden MP, MP_1 durch die Geraden MA, MD, demnach auch die Punkte a, d durch die Punkte A, D harmonisch getrennt sind, folglich der Punkt a dem Punkte d und eben so der Punkt b dem Punkte c und überdiess der Punkt M dem Punkte e conjugirt ist, so sind auch (252) die Punkte P, P_1 einander conjugirt.

303. In Hinsicht auf ein vollständiges Viereck ABCD ist jeder Geraden v, welche je zwei Gegenseiten in zwei Punkten schneidet, eine Curve II. Ordnung v_1 conjugirt, welche den Pol jener Geraden in Hinsicht auf jede durch die vier Eckpunkte des Vierecks gehende Curve II. Ordnung k enthält.

In Hinsicht auf ein vollständiges Vierseit ist jedem Strahlenbüschel erster Ordnung, dessen Mittelpunkt nicht mit zwei Gegenpunkten in einer Geraden liegt, ein Strahlenbüschel II. Ordnung conjugirt, welcher die Polare jenes Punktes in Hinsicht auf jede die vier Seiten des Vierseits berührende Curve II. Ordnung enthält.

Wenn nämlich M, N, S das Vorige bedeuten und dem Punkte P der Geraden v der Punkt P_1 conjugirt ist, so sind MP, NP, MP_1, NP_1 homologe Strahlen von vier zu einander projektivischen Strahlenbüscheln, von welchen der erste und zweite ein und dasselbe gerade Gebilde v projiciren, der erste und dritte aber und eben so der zweite und vierte involutorisch liegen. Fällt der Punkt P mit dem Schnittpunkte von MN und v zusammen, so fällt der Punkt P_1 mit dem Punkte S zusammen. Die beiden letztern von den erwähnten vier Strahlenbüscheln erzeugen also eine Curve II. Ordnung v_1, welche die sechs Seiten des vollständigen Vierecks in den drei Punkten M, N, S und in den Punkten E, F, G, H, I, K schneidet, welche in Hinsicht auf dasselbe den Spuren seiner Seiten AB, CD, AD, BC, AC, BD in der Geraden v conjugirt sind. Ist Q_1 der Pol der Geraden v in Hinsicht auf die Curve k, so muss der Punkt Q, welchem der Punkt

Q_1 in Hinsicht auf das vollständige Viereck und also auch in Hinsicht auf die Curve k conjugirt ist, in der Geraden v und mithin der Punkt Q_1 in der Curve v_1 liegen.

Da die Punkte B, D vom Punkte A durch die Geraden v, EG harmonisch getrennt sind, so geht (98) die Gerade EG und eben so auch die Gerade FH durch den Schnittpunkt von v und BD. Eben so ist der Schnittpunkt von EH und FG zugleich der Schnittpunkt von v und AC. Man kann hieraus ferner schliessen, dass die Gerade v von je zwei Gegenseiten des vollständigen Vierecks in zwei Punkten geschnitten wird, welche in Hinsicht auf die Curve v_1 einander conjugirt sind, und dass die drei Geraden EF, GH, IK in einem und demselben Punkte sich schneiden, welcher nämlich der Pol der Geraden v in Hinsicht auf die Curve v_1 ist.

---

§. 23.

Aufgaben vom zweiten Grade.

304. Wenn irgend eine Curve II. Ordnung gegeben ist, so kann man mit Hilfe derselben leicht finden, ob und welche Elemente zwei projektivische einförmige Grundgebilde, welche in einer und derselben Geraden liegen, oder eine gemeinschaftliche Axe haben, oder concentrisch sind und in einerlei Ebene liegen, entsprechend gemein haben, vorausgesetzt, dass zu drei Elementen des einen Gebildes die homologen Elemente des andern gegeben sind.

Haben z. B. zwei projektivische Strahlenbüschel, welche mit der gegebenen Curve in einerlei Ebene liegen, einen Punkt M der Curve zum gemeinschaftlichen Mittelpunkt, aus welchem drei Strahlen des einen Büschels die Punkte A, B, C und die ihnen entsprechenden Strahlen des andern Büschels die Punkte A_1, B_1, C_1 der Curve projiciren, so darf man nur (276) suchen, ob und welche Punkte die gegebene Curve mit der Geraden h gemein hat, die den Schnittpunkt von AB_1 und A_1B mit dem Schnittpunkte von AC_1 und A_1C verbindet. Liegen zwei projektivische gerade Gebilde in einer und derselben Geraden und mit der gegebenen

Curve in einerlei Ebene, so darf man nur, um diesen Fall auf den vorigen zurückzuführen, die beiden geraden Gebilde (drei Punkte des einen und die ihnen entsprechenden Punkte des andern) aus einem und demselben Punkte der Curve projiciren. Eben so kann jeder andere Fall durch Projiciren und Schneiden auf den zuerst betrachteten zurückgeführt werden.

Wenn die einförmigen Gebilde involutorisch liegen und also nach den Ordnungselementen eines involutorischen einförmigen Gebildes gefragt wird, so sind schon durch zwei Elementenpaare aa_1, bb_1 zu drei Elementen a, b, a_1 des einen Gebildes die homologen Elemente a_1, b_1, a des andern gegeben. Die oben erwähnte Gerade h ist alsdann die Polare des Punktes, in welchem die Geraden AA_1, BB_1 sich schneiden.

305. Es sind in einer Ebene fünf Punkte A, B, C, D, E, von welchen keine drei in einer Geraden liegen, und eine Gerade u gegeben, welche durch keinen der fünf Punkte geht; man soll die Punkte finden, welche diese Gerade mit der durch die fünf gegebenen Punkte bestimmten Curve II. Ordnung s gemein hat.

Es sind in einer Ebene fünf Gerade, von welchen keine drei in einem Punkte sich schneiden, und ein Strahlenbüschel erster Ordnung gegeben, dessen Mittelpunkt in keiner der fünf Geraden liegt; man soll die Strahlen finden, welche dieser Büschel mit dem durch die fünf gegebenen Geraden bestimmten Strahlenbüschel II. Ordnung gemein hat.

Man beziehe die Strahlenbüschel A, B projektivisch so aufeinander, dass den Strahlen AC, AD, AE des einen die Strahlen BC, BD, BE des andern entsprechen, so werden diese Büschel von der Geraden u in zwei zu einander projektivischen geraden Gebilden geschnitten, welche, wenn die Curve s und die Gerade u sich schneiden, diese Schnittpunkte entsprechend gemein haben. Haben die geraden Gebilde nur einen Punkt entsprechend gemein, so wird in ihm die Curve von der Geraden u berührt. Wenn aber die geraden Gebilde keinen Punkt entsprechend gemein haben, so hat auch die Gerade u mit der Curve keinen Punkt gemein. Wären statt der fünf Punkte A, B, C, D, E fünf Tangenten der Curve s gegeben, so dürfte man nur (260)

von drei Tangenten a, b, c die Berührungspunkte A, B, C suchen und alsdann die Büschel A, B projektivisch so aufeinander beziehen, dass den Strahlen a, AB, AC des erstern die Strahlen BA, b, BC des letztern entsprechen. Ein anderes Verfahren, die obige Aufgabe auf 304 zurückzuführen, besteht in Folgendem:

Es seyen M, N die Spuren der Geraden AB, AC in der Geraden u. Man suche (260) den Punkt F der Curve s, welcher aus dem Punkte C durch die Gerade CM projicirt wird, so ist die Gerade, welche den Schnittpunkt von AF und BC mit dem Schnittpunkte von AC und BF verbindet, die Polare des Punktes M und mithin ihre Spur M_1 in der Geraden u dem Punkte M conjugirt. Sucht man auf diese Weise auch den Punkt N_1 der Geraden u, welcher dem Punkte N conjugirt ist, so kommt es alsdann nur darauf an, ob die Punkte N, N_1 in einer und derselben Strecke MM_1 liegen, oder ob der Punkt N_1 mit dem Punkte M_1 zusammenfällt, oder ob die Punkte N, N_1 durch die Punkte M, M_1 getrennt sind. Im ersten Falle schneiden sich die Curve s und die Gerade u in den Punkten, welche sowohl durch die Punkte M, M_1 als auch durch die Punkte N, N_1 harmonisch getrennt und also die Ordnungspunkte des involutorischen geraden Gebildes u sind. Im zweiten Falle haben die Curve s und die Gerade u nur den Punkt M_1, im dritten Falle aber gar keinen Punkt mit einander gemein.

306. Eine Gerade zu finden, welche vier gegebene Gerade a, b, c, d, von welchen keine zwei in einerlei Ebene liegen, schneide.

Man projicire das gerade Gebilde c sowohl aus der Axe a als auch aus der Axe b auf die Gerade d, so erhält man zwei projektivische gerade Gebilde, welche in einer und derselben Geraden d liegen. Haben diese Gebilde drei Punkte und also alle ihre Punkte entsprechend gemein, so giebt es durch jeden Punkt der Geraden d eine Gerade, welche die vier gegebenen Geraden schneidet. Ist aber diess nicht der Fall, so ist die Aufgabe auf 304 zurückgeführt.

307. In n gegebenen Geraden a_1, a_2, a_3, a_4, ... a_n, von welchen jede folgende die vorhergehende, die letzte aber auch die erste schneidet, n Punkte P_1, P_2, P_3, P_4, ... P_n zu finden, so dass die n Geraden P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, ... P_nP_1 der Ordnung

nach durch n gegebene Punkte C_1, C_2, C_3, ... C_n gehen. Es wird hiebei vorausgesetzt, dass der Punkt C_1 in der Ebene $a_1 a_2$, aber in keiner von den beiden Geraden a_1, a_2 liege, dass man also das gerade Gebilde a_1 aus dem Punkte C_1 auf die Gerade a_2, eben so das gerade Gebilde a_2 (die Projektion von a_1) aus dem Punkte C_2 auf die Gerade a_3, das gerade Gebilde a_3 aus dem Punkte C_3 auf die Gerade a_4 u. s. w. und das gerade Gebilde a_n aus dem Punkte C_n auf die Gerade a_1 projiciren könne. Man erhält alsdann $n+1$ zu einander projektivische gerade Gebilde, von welchen jedes folgende eine Projektion des vorhergehenden ist, das letzte aber mit dem ersten in einer und derselben Geraden liegt. Haben nun diese beiden Gebilde drei Punkte und also alle ihre Punkte entsprechend gemein, so kann jeder Punkt der Geraden a_1 der Punkt P_1 seyn. Ist aber diess nicht der Fall, so ist die Aufgabe auf 304 zurückgeführt. Wenn die gegebenen Geraden die Seiten eines n Ecks sind, so kann die Aufgabe auch so ausgesprochen werden:

In ein gegebenes n Eck ein n Eck zu beschreiben, dessen Seiten der Ordnung nach durch n gegebene Punkte gehen.

308. In eine gegebene Curve II. Ordnung s ein n Eck zu beschreiben, dessen Seiten der Ordnung nach durch n gegebene Punkte Q_1, Q_2, Q_3, ... Q_n gehen, von welchen keiner in der gegebenen Curve liegt.

Um eine gegebene Curve II. Ordnung ein n Eck zu beschreiben, dessen Eckpunkte der Ordnung nach in n gegebenen Geraden liegen, von welchen keine die gegebene Curve berührt.

Nennt man $n+1$ Punkte P_1, P_2, P_3, P_4, ... P_n, P_{n+1} der Curve s einander entsprechend, wenn die Geraden P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, ... P_nP_{n+1} der Ordnung nach durch die Punkte Q_1, Q_2, Q_3, ... Q_n gehen, so hat man $n+1$ ebene Systeme projektivisch so aufeinander bezogen, dass alle die Curve s entsprechend gemein haben und jedes folgende mit dem vorhergehenden involutorisch liegt. Wenn nun das erste und letzte drei Punkte der Curve s und also alle ihre Punkte entsprechend gemein haben, so lässt die Aufgabe unendlich viele Auflösungen zu. Ist aber diess nicht der Fall, so findet man auf die in 276 angegebene Weise, indem man nämlich zu drei in der Curve s befindlichen

Punkten A_1, B_1, C_1 des ersten Systems die homologen Punkte A_{n+1}, B_{n+1}, C_{n+1} des letzten sucht und alsdann den Schnittpunkt von $A_1 B_{n+1}$ und $A_{n+1} B_1$ mit dem Schnittpunkte von $A_1 C_{n+1}$ und $A_{n+1} C_1$ durch eine Gerade h verbindet, ob und welche Punkte der Curve s das erste und letzte System entsprechend gemein haben.

309. Es sind zwei involutorische einförmige Gebilde gegeben, welche entweder in einer und derselben Geraden liegen, oder concentrisch sind und in einerlei Ebene liegen, oder eine gemeinschaftliche Axe haben; man soll zwei Elemente finden, welche in jedem der beiden Gebilde einander zugeordnet sind.

Man nenne drei Elemente V, V_1, V_2 einander entsprechend, wenn in dem einen involutorischen Gebilde dem Elemente V das Element V_1 und im andern dem Elemente V das Element V_2 zugeordnet ist, so hat man offenbar drei projektivische Gebilde v, v_1, v_2, von welchen das erste mit jedem der beiden übrigen involutorisch liegt, daher es nur darauf ankommt, die Elemente zu finden, welche die Gebilde v_1, v_2 entsprechend gemein haben.

Ist irgend eine Curve II. Ordnung gegeben, so kann man ferner annehmen, dass die gegebenen involutorischen Gebilde Strahlenbüschel sind, welche einen Punkt M der Curve zum gemeinschaftlichen Mittelpunkt haben und mit ihr in einerlei Ebene liegen, indem auf diesen Fall (wie in 304) jeder andere Fall zurückgeführt werden kann. Es seyen nun in dem einen involutorischen Büschel den Strahlen MA, MB, welche die Punkte A, B der Curve projiciren, die Strahlen MA_1, MB_1 zugeordnet, welche die Punkte A_1, B_1 der Curve projiciren, so werden (278) je zwei Punkte der Curve, welche mit dem Schnittpunkte H von AA_1 und BB_1 in einer Geraden liegen, durch zwei einander zugeordnete Strahlen jenes Büschels projicirt. Eben so findet man einen Punkt J, welcher mit je zwei Punkten A, A_2 der Curve, die aus dem Punkte M durch zwei einander zugeordnete Strahlen des andern involutorischen Büschels projicirt werden, in einer Geraden liegt. Wenn also die Gerade HJ die Curve in zwei Punkten P, Q schneidet, so sind die Strahlen MP, MQ in jedem der beiden involutorischen Büschel einander zugeordnet. Wird aber die Curve von der Geraden HJ nur in einem Punkte P be-

rührt, so haben die involutorischen Büschel einen Ordnungsstrahl MP mit einander gemein. Wenn endlich die Gerade HJ mit der Curve gar keinen Punkt gemein hat, so giebt es auch kein Element, welches in beiden involutorischen Gebilden sich selbst oder einem und demselben andern Elemente zugeordnet ist. Dieser Fall findet offenbar nur dann Statt, wenn jedes von den beiden involutorischen Gebilden zwei Ordnungselemente hat, und überdiess die Ordnungselemente des einen durch die Ordnungselemente des andern getrennt sind.

310. Es sind in einer Ebene ein involutorischer Strahlenbüschel und ein involutorisches gerades Gebilde u gegeben, welches aber weder durch den Mittelpunkt des Büschels geht, noch ein Schnitt desselben ist; man soll in dem geraden Gebilde zwei einander zugeordnete Punkte finden, welche in zwei einander zugeordneten Strahlen des Büschels liegen.

Um diese Aufgabe auf die vorige zurückzuführen, darf man nur entweder das gerade Gebilde aus dem Mittelpunkte des Büschels projiciren oder den Schnitt des Büschels mit der Geraden u in Betrachtung ziehen. Wenn das eine von den beiden involutorischen Gebilden zwei Ordnungselemente hat und diese gegeben sind, so kann die obige Aufgabe, in welcher statt des Strahlenbüschels auch ein Ebenenbüschel gegeben seyn kann, dessen Axe das gerade Gebilde nicht schneidet, anders ausgesprochen werden. Z. B.

In einem gegebenen involutorischen Ebenenbüschel zwei einander zugeordnete Ebenen zu finden, welche durch zwei gegebene Punkte, die mit der Axe des Büschels nicht in einerlei Ebene liegen, harmonisch getrennt sind.

311. Um ein gegebenes Viereck, welches lauter ausspringende Winkel hat, eine Curve II. Ordnung zu beschreiben, welche eine gegebene Gerade, die mit dem Umfange des Vierecks keinen Punkt gemein hat, berühre. 299.

In ein gegebenes Viereck, welches lauter ausspringende Winkel hat, eine Curve II. Ordnung zu beschreiben, welche durch einen innerhalb des Vierecks gegebenen Punkt gehe.

312. Durch ein Dreieck ABC

Durch ein Dreieck und zwei

und zwei Punkte D, E, welche vom Umfange desselben eingeschlossen sind, aber mit keinem der drei Eckpunkte in einer und derselben Geraden liegen, ist ein vollständiges Viereck bestimmt, von dessen sechs Seiten je zwei einander gegenüberliegende sowohl durch zwei Seiten des Dreiecks als auch durch die beiden gegebenen Punkte harmonisch getrennt sind.

von seinem Umfange ausgeschlossene Gerade, deren Schnittpunkt nicht mit zwei Eckpunkten des Dreiecks in einer und derselben Geraden liegt, ist ein vollständiges Vierseit bestimmt, von dessen sechs Eckpunkten je zwei einander gegenüberliegende sowohl durch zwei Eckpunkte des Dreiecks als auch durch die beiden gegebenen Geraden harmonisch getrennt sind.

Nach 310 enthält der Strahlenbüschel A zwei Strahlen p, p_1, welche sowohl durch die Geraden AB, AC als auch durch die Punkte D, E harmonisch getrennt sind. Eben so kann man in dem Büschel B zwei Strahlen q, q_1 finden, welche sowohl durch die Geraden BA, BC als auch durch die Punkte D, E harmonisch getrennt sind. Bezeichnet man nun die Punkte pq, p_1q_1, pq_1, p_1q durch M, N, S, T, so sind A(BMCN), B(AMCN) zwei harmonische und also auch zu einander projektivische Strahlenbüschel, welche den Strahl AB gemein haben, daher die Punkte M, C, N in einer Geraden liegen. Eben so lässt sich beweisen, dass die Gerade ST durch den Punkt C geht. Dass aber die Seiten MN, ST des vollständigen Vierecks sowohl durch die Geraden CA, CB als auch durch die Punkte D, E harmonisch getrennt sind, folgt aus 99 und 223.

Anm. Würde die Gerade DE durch den Punkt C gehen, so würde eine von den Geraden MN, ST mit der Geraden DE zusammenfallen.

313. In ein gegebenes Dreieck ABC eine Curve II. Ordnung zu beschreiben, welche durch zwei innerhalb des Dreiecks gegebene Punkte D, E gehe.

Um ein gegebenes Dreieck eine Curve II. Ordnung zu beschreiben, welche zwei gegebene, vom Umfange des Dreiecks ausgeschlossene Gerade berühre.

Geht die Gerade DE durch keinen Eckpunkt des Dreiecks ABC, so führt jeder von den vier Eckpunkten des im Vorigen betrachteten Vierecks MNST (als Pol der Geraden DE) auf

eine Auflösung der Aufgabe. Beschreibt man z. B. eine Curve II. Ordnung, welche die Geraden MD, ME in den Punkten D, E und überdiess auch die Gerade AB berührt, so ist in Hinsicht auf dieselbe der Schnittpunkt der Geraden AN, DE, welcher vom Schnittpunkte der Geraden AM, DE durch die Punkte D, E harmonisch getrennt ist, der Pol der Geraden AM und folglich die Gerade AM der Geraden AN conjugirt. Da aber diese Linien durch die Seiten AB, AC des Dreiecks ABC harmonisch getrennt sind und die Curve die Seite AB berührt, so muss sie auch die Seite AC und eben so die Seite BC berühren. Geht die Gerade DE durch einen Eckpunkt des Dreiecks ABC, so lässt die Aufgabe nur zwei Auflösungen zu.

314. Es sind in einer Ebene ein Dreieck ABC und ein involutorisches gerades Gebilde u gegeben, welches von den Seiten AB, AC, BC des Dreiecks in drei Punkten P, Q, R geschnitten wird, deren keiner sich selbst zugeordnet ist; man soll durch die Eckpunkte des gegebenen Dreiecks eine Curve II. Ordnung legen, so dass je zwei einander zugeordnete Punkte des involutorischen geraden Gebildes in Hinsicht auf dieselbe einander conjugirt sind.

Man projicire den Punkt P_2, welcher vom Punkte P durch die Punkte A, B harmonisch getrennt ist, aus dem Punkte R auf die Gerade AC und aus dem Punkte Q auf die Gerade BC, so erhält man noch zwei harmonische gerade Gebilde $AQCQ_2$, $BRCR_2$, daher auch R_2 eine Projektion von Q_2 aus dem Punkte P ist. Es seyen ferner in dem involutorischen geraden Gebilde u den Punkten P, Q, R, welche die Spuren der Geraden Q_2R_2, P_2R_2, P_2Q_2 sind, die Punkte P_1, Q_1, R_1 zugeordnet, so schneiden sich (222) die drei Geraden P_1P_2, Q_1Q_2, R_1R_2 in einem Punkte M, welcher in keiner Seite des Dreiecks ABC liegt, daher die Gerade u von den Geraden MA, MB, MC in drei Punkten A_1, B_1, C_1 geschnitten wird, von welchen keiner, wie man sich leicht überzeugt, sich selbst zugeordnet ist. Würde nämlich der Punkt A_1 mit dem ihm zugeordneten Punkte A_2 zusammenfallen, so müsste auch, da $A_1PB_1P_1$ (als Projektion von $APBP_2$) ein harmonisches Gebilde ist, der Punkt B_1 und eben so der Punkt C_1 sich selbst zugeordnet seyn, was nicht möglich ist.

Wenn nun den Punkten P, Q, R, A die Geraden MP_1, MQ_1, MR_1, AA_2 zugeordnet werden, so erhält man (240) ein Polarsystem, dessen Ordnungscurve die Gerade AA_2 im Punkte A berührt, aber auch, weil dieser Punkt vom Punkte B durch die einander conjugirten Punkte P, P_2 harmonisch getrennt ist, durch den Punkt B und eben so durch den Punkt C geht.

Man betrachtet eine Curve II. Ordnung als gefunden, wenn man das Polarsystem gefunden hat, von welchem sie die Ordnungscurve ist. Die obige Aufgabe ist hiernach eine Aufgabe vom ersten Grade, die aber desshalb hier aufgenommen worden ist, um einige Bemerkungen über imaginäre Elemente daranknüpfen zu können.

315. Wenn in einem Satze zwei Elemente als Ordnungselemente eines involutorischen Gebildes erscheinen, so kann derselbe in der Regel dadurch allgemeiner aufgefasst werden, dass man von der Voraussetzung, das involutorische Gebilde habe zwei Ordnungselemente, abstrahirt. Um hieran zu erinnern, sagt man von einem involutorischen einförmigen Gebilde, in welchem kein (reelles) Element sich selbst zugeordnet ist, dass seine Ordnungselemente imaginär seyen.

Eine Gerade und eine Curve II. Ordnung, welche in einerlei Ebene liegen, aber keinen (reellen) Punkt mit einander gemein haben, schneiden sich in zwei imaginären Punkten, die gegeben heissen, wenn in der Geraden zu irgend zwei in Hinsicht auf die Curve einander nicht conjugirten Punkten die ihnen conjugirten Punkte gegeben sind.

Ein Strahlenbüschel, dessen Mittelpunkt von einer in derselben Ebene befindlichen Curve II. Ordnung eingeschlossen ist, hat mit dem dieser Curve sich anschmiegenden Strahlenbüschel zwei imaginäre Strahlen gemein, welche gegeben heissen, wenn in dem erstern Büschel zu zwei in Hinsicht auf die Curve einander nicht conjugirten Strahlen die ihnen conjugirten Strahlen gegeben sind.

In der vorigen Aufgabe sind, wenn das involutorische gerade Gebilde keine (reellen) Ordnungselemente hat, von der gesuchten Curve drei reelle und zwei imaginäre Punkte gegeben. Die reciproke Aufgabe, in welcher von einer Curve II. Ordnung drei

reelle und zwei imaginäre Tangenten gegeben sind, kann man, wenn der Ausdruck „imaginär“ vermieden werden soll, so aussprechen:

Es sind in einer Ebene ein involutorischer Strahlenbüschel, in welchem kein Strahl sich selbst conjugirt ist, und ein Dreieck gegeben, von dessen drei Seiten keine durch den Mittelpunkt des Büschels geht; man soll eine Curve II. Ordnung finden, welche die drei Seiten des Dreiecks berühre, so dass überdiess je zwei einander zugeordnete Strahlen des gegebenen involutorischen Strahlenbüschels in Hinsicht auf die Curve einander conjugirt seyen.

316. Eine Curve II. Ordnung zu finden, welche die drei Seiten eines gegebenen Dreiecks ABC berühre und durch zwei gegebene imaginäre Punkte gehe, die in keiner Seite des Dreiecks, aber mit ihm in einerlei Ebene liegen.

Eine Curve II. Ordnung zu finden, welche durch die drei Eckpunkte eines gegebenen Dreiecks gehe und zwei gegebene imaginäre Gerade berühre, die in keinem Eckpunkte des Dreiecks sich schneiden, aber mit ihm in einerlei Ebene liegen.

Es seyen in dem involutorischen geraden Gebilde u, dessen Ordnungspunkte die gegebenen imaginären Punkte sind, den Spuren P, Q der Geraden AB, AC die Punkte P_1, Q_1 zugeordnet. Es sey ferner (312), wenn die Gerade u durch keinen Eckpunkt des gegebenen Dreiecks geht, MNST das vollständige Viereck, von dessen sechs Seiten je zwei einander gegenüberliegende durch zwei Seiten des Dreiecks harmonisch getrennt sind und die Gerade u in zwei einander zugeordneten Punkten schneiden. Wenn nun P_2 der Schnittpunkt von AB und MP_1 ist und den Punkten P, P_1, Q, P_2 die geraden MP_1, MP, MQ_1, AB zugeordnet werden, so ist dadurch (240) ein Polarsystem bestimmt, dessen Ordnungscurve die Gerade u in den gegebenen imaginären Punkten schneidet und die Gerade AB im Punkte P_2 berührt. Da aber die Geraden BM, BN die Gerade u in conjugirten Punkten schneiden, mithin der Schnittpunkt von BN und u der Pol der Geraden BM ist, folglich die Geraden BM, BN einander conjugirt und überdiess nach der Construktion durch die Geraden BA, BC harmonisch getrennt sind, so berührt die Curve auch die Gerade BC und eben so auch die Gerade AC. — Eben so führt

jeder andere Eckpunkt des vollständigen Vierecks MNST auf eine Auflösung der Aufgabe. Geht aber die Gerade u durch einen Eckpunkt des Dreiecks ABC, so lässt die Aufgabe nur zwei Auflösungen zu.

317. Durch eine Curve II. Ordnung s und ein in derselben Ebene befindliches Dreieck ABC, von dessen drei Seiten keine die Curve berührt, auch keine zwei durch zwei Tangenten der Curve getrennt sind, ist ein vollständiges Viereck bestimmt, von dessen sechs Seiten je zwei einander gegenüberliegende durch zwei Seiten des Dreiecks harmonisch getrennt und in Hinsicht auf die Curve einander conjugirt sind. Jeder Eckpunkt dieses Vierecks, in welchem zwei Tangenten der Curve, deren keine durch einen Eckpunkt des Dreiecks geht, sich schneiden, führt auf eine Auflösung der Aufgabe:

Eine Curve II. Ordnung zu finden, welche die gegebene Curve in zwei Punkten und überdiess die drei Seiten des gegebenen Dreiecks berühre.

Durch eine Curve II. Ordnung und ein in derselben Ebene befindliches Dreieck, von dessen drei Eckpunkten keiner in der Curve liegt, auch keine zwei durch die Curve getrennt sind, ist ein vollständiges Vierseit bestimmt, von dessen sechs Eckpunkten je zwei einander gegenüberliegende durch zwei Eckpunkte des Dreiecks harmonisch getrennt und in Hinsicht auf die Curve einander conjugirt sind. Jede Seite dieses Vierseits, welche die Curve in zwei Punkten schneidet, deren keiner in einer Seite des Dreiecks liegt, führt auf eine Auflösung der Aufgabe:

Eine Curve II. Ordnung zu finden, welche die gegebene Curve in zwei Punkten berühre und durch die drei Eckpunkte des gegebenen Dreiecks gehe.

Der Strahlenbüschel A enthält zwei Strahlen p, p_1, welche durch die Geraden AB, AC harmonisch getrennt und in Hinsicht auf die Curve s einander conjugirt sind. Eben so kann man in dem Büschel B zwei Strahlen q, q_1 finden, welche durch die Geraden BA, BC harmonisch getrennt und in Hinsicht auf die Curve s einander conjugirt sind. Bezeichnet man also die Punkte pp_1, p_1q_1, pq_1, p_1q durch M, N, S, T, so sind (312) die Geraden MN, ST durch die Geraden CA, CB harmonisch getrennt

und (244) in Hinsicht auf die Curve s einander conjugirt. Wenn nun die Polare M_1 des Punktes M die Gerade AB in einem Punkte schneidet, welcher nicht in der Curve s liegt, so giebt es (280) eine Curve II. Ordnung k, welche die Gerade AB berührt und die Bedingung erfüllt, dass die Polare eines jeden in der Geraden M_1 befindlichen Punktes in Hinsicht auf beide Curven dieselbe sey. Da hiernach die Geraden AM, AN auch in Hinsicht auf die Curve k einander conjugirt und überdiess durch die Geraden AB, AC harmonisch getrennt sind, so berührt die Curve k auch die Gerade AC und eben so auch die Gerade BC.

Wird die Curve s von der Geraden M_1 in zwei (reellen) Punkten D, E geschnitten, so berühren sich die Curven s, k in diesen Punkten, daher auch keiner derselben in einer Seite des Dreiecks ABC liegt. Geht die Gerade M_1 durch ihren Pol M, so kann man sagen, dass die beiden Berührungspunkte D, E mit dem Punkte M zusammenfallen. Wenn endlich die Gerade M_1 mit der Curve s keinen Punkt gemein hat, so sagt man, dass die Curven s, k in zwei imaginären Punkten sich berühren, welche in der Geraden M_1 liegen und aus dem Punkte M durch zwei gemeinschaftliche imaginäre Tangenten der beiden Curven projicirt werden.

Aus dem Obigen folgt noch, dass die Punkte D, E, wenn irgend eine Seite AB des Dreiecks ABC durch keinen derselben geht, auch ausserhalb der beiden andern Seiten liegen. Wenn aber in jeder Seite des Dreiecks ABC wenigstens einer von den beiden Punkten D, E liegt, so muss wenigstens einer derselben mit einem Eckpunkte des Dreiecks zusammenfallen, so dass alsdann im Punkte M zwei Tangenten der Curve s sich schneiden, von welchen wenigstens eine durch einen Eckpunkt des Dreiecks ABC geht. In diesem Falle besteht der Strahlenbüschel II. Ordnung k, welchem die drei Seiten des Dreiecks ABC und die beiden Strahlen MD, ME des Strahlenbüschels s angehören (deren Mittelpunkte in Hinsicht auf beide Büschel die Punkte D, E sind), aus zwei Strahlenbüscheln D, E erster Ordnung.

§. 24.

Polarsysteme im Raume.

318. In einem räumlichen Polarsysteme ist jedem Punkte eine Ebene, jedem ebenen Systeme ein Strahlenbündel zugeordnet, dessen Strahlen und Ebenen den Geraden und Punkten des ebenen Systems zugeordnet sind. Jede Ebene wird die Polare des ihr zugeordneten Punktes und dieser der Pol jener Ebene genannt, so dass also die Polaren von allen Punkten, welche in einer und derselben Ebene liegen, durch den Pol dieser Ebene gehen, und die Pole von allen Ebenen, welche durch einen und denselben Punkt gehen, in der Polare dieses Punktes liegen. Ist der Geraden a die Gerade a_1 zugeordnet, so ist dem geraden Gebilde a der Ebenenbüschel a_1 und dem Ebenenbüschel a das gerade Gebilde a_1 zugeordnet. Da hiernach die Polaren von allen Punkten, welche in der einen von den beiden Geraden liegen, in der andern sich schneiden, so heisst auch jede von den beiden Geraden die Polare der andern.

Wenn die Pole A, B von zwei Ebenen A_1, B_1 in der Schnittlinie $A_1 B_1$ derselben liegen, so ist diese Gerade sich selbst (der Geraden A B) zugeordnet. Ist von zwei sich schneidenden Geraden die eine der andern oder jede sich selbst zugeordnet, so ist ihr Schnittpunkt der Pol der Ebene, in welcher sie liegen.

319. In einem räumlichen Polarsysteme heissen einander conjugirt:

Zwei Punkte, wenn der eine und also jeder in der Polare des andern liegt.

Ein Punkt und eine Gerade, wenn die Gerade in der Polare des Punktes und also der Punkt in der Polare der Geraden liegt.

Zwei Ebenen, wenn die eine und also jede durch den Pol der andern geht.

Eine Ebene und eine Gerade, wenn die Gerade durch den Pol der Ebene und also die Ebene durch die Polare der Geraden geht.

Es ist hiernach ein Punkt allen Punkten und Geraden, welche in seiner Polare liegen, eine Ebene allen Ebenen und Geraden, welche durch ihren Pol gehen, eine Gerade aber allen in ihrer Polare befindlichen Punkten und allen durch ihre Polare gehenden

Ebenen conjugirt. Liegt ein Punkt in seiner Polare, so ist jedes von diesen beiden Elementen auch sich selbst conjugirt.

320. Zwei Gerade a, b sollen in einem räumlichen Polarsysteme einander conjugirt heissen, wenn die eine und also jede mit der Polare der andern in einerlei Ebene liegt. Ist durch die Gerade a und die Polare b_1 der Geraden b eine Ebene ab_1 bestimmt, so schneiden sich die Polare a_1 der Geraden a und die Gerade b im Pole jener Ebene.

Eine Gerade ist hiernach sich selbst conjugirt, wenn sie entweder sich selbst zugeordnet ist, oder ihre Polare schneidet. Schneidet eine sich selbst zugeordnete Gerade c die eine a von zwei einander zugeordneten Geraden a, a_1, so muss sie auch die andere schneiden. Der Pol der Ebene ca muss sowohl in der Geraden c als auch in der Geraden a_1 liegen.

321. Ein räumliches Polarsystem soll, wenn nicht jeder Punkt sich selbst conjugirt ist, ein gewöhnliches Polarsystem, im Falle aber jeder Punkt in seiner Polare liegt, ein Nullsystem genannt werden. Wird irgend eine Gerade a eines Polarsystems von ihrer Polare a_1 geschnitten, so ist das System ein gewöhnliches Polarsystem. Der Punkt aa_1 ist nämlich der Pol der Ebene aa_1, jeder andere Punkt P der Geraden a aber der Pol von einer andern durch die Gerade a_1 gehenden Ebene, welche also nicht durch den Punkt P geht.

In einem Nullsysteme hat jeder Strahlenbündel S mit dem ihm zugeordneten ebenen Systeme U einen Strahlenbüschel entsprechend gemein. Jede Gerade, welche durch den Punkt S geht und in der Ebene U liegt, fällt mit ihrer Polare, da diese ebenfalls in der Ebene U liegt und durch den Punkt S geht, aber die erstere nicht schneidet, zusammen.

322. In einem gewöhnlichen räumlichen Polarsysteme liegt jeder Strahlenbündel S, dessen Mittelpunkt S ausser seiner Polare U sich befindet, mit dem ihm zugeordneten ebenen Systeme involutorisch, daher in dem räumlichen Polarsysteme unendlich viele ebene Polarsysteme, poläre Strahlenbündel, Polardreiecke, Polardreikante und Polartetraeder enthalten sind.

Wenn nämlich dem Punkte A der Ebene U die Ebene Sa zugeordnet ist, welche die Ebene U in der Geraden a schneidet,

so ist dieser Geraden die Gerade SA zugeordnet, welche den Pol der Ebene Sa aus dem Pole der Ebene U projicirt. Es erscheint hiernach die Ebene U als Träger eines ebenen Polarsystems und der Punkt S als Mittelpunkt eines polären Strahlenbündels, so dass im erstern dieser Systeme ein Punkt und eine Gerade, im letztern aber ein Strahl und eine Ebene einander zugeordnet sind, wenn sie in dem räumlichen Polarsysteme einander conjugirt sind. Jedes Polardreieck ABC des ebenen Polarsystems wird aus dem Punkte S durch ein Polardreikant des Strahlenbündels projicirt und bildet mit diesem Dreikante ein Polartetraeder ABCS, in welchem jeder Eckpunkt der Pol der ihm gegenüberliegenden Fläche ist. Je zwei Gegenkanten des Tetraeders sind einander zugeordnet, je zwei sich schneidende Kanten aber einander conjugirt.

Hat das ebene Polarsystem U eine Ordnungscurve, so hat das Polarsystem im Strahlenbündel S eine Ordnungsfläche, von welcher jene Curve ein Schnitt ist. In dem räumlichen Polarsysteme ist die Curve dem der Kegelfläche sich anschmiegenden Ebenenbüschel, die Kegelfläche dem der Curve sich anschmiegenden Strahlenbüschel, die von der Curve eingeschlossene Figur dem von der Kegelfläche ausgeschlossenen Systeme von Ebenen und der von der Kegelfläche eingeschlossene Strahlenkegel dem von der Curve ausgeschlossenen Systeme von Geraden zugeordnet.

Jede Tangente der Curve wird im Berührungspunkte von dem ihr zugeordneten Strahle der Kegelfläche geschnitten, in welchem diese Fläche von der durch die beiden Geraden bestimmten Ebene berührt wird.

323: In einem gewöhnlichen Polarsysteme liegt jedes gerade Gebilde a, dessen Träger weder sich selbst zugeordnet ist, noch von seiner Polare geschnitten wird, mit dem ihm zugeordneten Ebenenbüschel a_1 involutorisch.

Läge jeder Punkt F der Geraden a und eben so jeder Punkt G der Geraden a_1 in seiner Polare, so wäre (318) jede Gerade FG, welche die Geraden a, a_1 schneidet, sich selbst zugeordnet und also jede Ebene FGH sich selbst conjugirt, was gegen die Annahme ist. Es sei nun V ein Punkt, welcher in irgend einer von den beiden Geraden a, a_1, etwa in der Geraden a, aber nicht

in seiner Polare a_1 Q liegt, so liegt in dieser Ebene (322) das gerade Gebilde a_1 mit dem ihm zugeordneten Strahlenbüschel Q und also in dem räumlichen Polarsysteme das gerade Gebilde a_1 mit dem ihm zugeordneten Ebenenbüschel a involutorisch. Dass aber auch das gerade Gebilde a und der ihm zugeordnete Ebenenbüschel a_1 involutorisch liegen, geht daraus hervor, weil den Punkten P, Q die Ebenen a_1 Q, a_1 P zugeordnet sind.

Ist dem Flächenwinkel, welcher aus der Axe a_1 die Strecke PQ projicirt, die Strecke Q·P zugeordnet, so liegt kein Punkt der Geraden a in seiner Polare. Ist aber dem erwähnten Winkel die Strecke QP zugeordnet, so enthält die Gerade a zwei sich selbst conjugirte Punkte, durch welche je zwei einander conjugirte Punkte derselben harmonisch getrennt sind.

324. In einem räumlichen Polarsysteme sind je zwei einander conjugirte Punkte P, Q die Mittelpunkte und je zwei einander conjugirte Ebenen die Träger von zwei einander zugeordneten Strahlenbüscheln P, Q. Jeder Geraden, welche durch den Punkt P geht und in der Polare des Punktes Q liegt, ist eine Gerade zugeordnet, welche in der Polare des Punktes P liegt und durch den Punkt Q geht.

Wenn ein Punkt A in seiner Polare A_1 liegt, und in dem Strahlenbüschel, welcher den Punkt A zum Mittelpunkt hat und in der Ebene A_1 liegt, jeder Strahl sich selbst zugeordnet ist so liegt jeder Punkt der Ebene A_1 in seiner Polare, daher jedes gerade Gebilde, welches in der Ebene A_1 liegt, aber nicht durch den Punkt A geht, ein Schnitt des ihm zugeordneten Ebenenbüschels und also (323) das Polarsystem ein Nullsystem ist. Wenn aber irgend ein Strahl des erwähnten Büschels sich nicht selbst zugeordnet und also (321) das Polarsystem ein gewöhnliches ist, so enthält der Büschel entweder gar keinen Strahl, welcher sich selbst zugeordnet ist, oder zwei solche Strahlen, durch welche alsdann je zwei einander zugeordnete Strahlen desselben harmonisch getrennt sind. Im erstern von diesen beiden Fällen ist der Punkt A der einzige sich selbst conjugirte Punkt der Ebene A_1. Wäre nämlich noch ein anderer Punkt B dieser Ebene sich selbst conjugirt, so wäre (318) die Gerade AB sich selbst zugeordnet.

325. Durch jedes Fünfeck ABCDE, von dessen fünf Eck-

punkten keine vier in einerlei Ebene liegen, ist ein Nullsystem bestimmt, in welchem jeder Eckpunkt des Fünfecks der Pol (Nullpunkt) der Ebene ist, welche ihn mit den benachbarten Eckpunkten verbindet.

Bezieht man nämlich zwei räumliche Systeme projectivisch so aufeinander, dass den Punkten A, B, C, D, E des einen die Ebenen EAB, ABC, BCD, CDE, DEA des andern entsprechen, so entsprechen auch diesen Ebenen des erstern die Punkte A, B, C, D, E des letztern, woraus man (133) schliessen kann, dass je zwei homologe Elemente einander doppelt entsprechen. Da nun die Gerade DE, welche den Punkt D mit dem Punkte E verbindet, der Schnittlinie der Ebenen CDE, DEA, also sich selbst zugeordnet ist, so ist der Punkt P, in welchem diese Gerade die Ebene ABC schneidet, der Ebene BDE und mithin auch die Gerade BP, welche den Punkt B mit dem Punkte P verbindet und zugleich die Schnittlinie der Ebenen ABC, BDE ist, sich selbst zugeordnet. Da dies aber auch von den Geraden BA, BC gilt, so ist (324) das Polarsystem ein Nullsystem.

In einem Nullsysteme ist jedem vollständigen nFlache ein vollständiges nEck zugeordnet, so dass die Eckpunkte eines jeden von den beiden Gebilden in den ihnen zugeordneten Flächen des andern liegen.

326. Wenn in zwei reciproken Systemen den Eckpunkten eines Tetraeders ABCD die ihnen gegenüberliegenden Flächen entsprechen, so liegen die Systeme involutorisch.

Entsprechen nämlich den Punkten A, B, C, D des einen Systems die Ebenen BCD, ACD, ABD, ABC des andern, so entsprechen auch diesen Ebenen des erstern die Punkte A, B, C, D des letztern. Wenn ferner der Ebene ABP des erstern Systems, welche durch die Schnittlinie der Ebenen ABC, ABD geht und mithin die Gerade CD in einem Punkte P schneidet, der Punkt Q des letztern entspricht, welcher also in der Geraden CD liegt, so muss, weil der Ebenenbüschel AB (CDPQ) dem geraden Gebilde CDPQ und also auch (118) dem geraden Gebilde DCQP projectivisch ist, der Ebene ABQ des erstern Systems der Punkt P des letztern und mithin dem Punkte Q des erstern, in welchem die Ebene ABQ die Gerade CD schneidet, die Ebene ABP des

letztern entsprechen, welche den Punkt P aus der Geraden AB projicirt. Indem so jede Ebene, welche durch eine Kante des Tetraeders ABCD geht, und der ihr entsprechende Punkt einander doppelt entsprechen, gilt dies auch von jedem Punkte, in welchem eine durch AB, eine durch AC und eine durch BC (oder eine durch AB, eine durch AD und eine durch BD) gehende Ebene sich schneiden, und der ihm entsprechenden Ebene.

327. Wird ein Tedraeter ABCD als Polartetraeder angenommen, so kann man noch zu einem Punkte E, welcher in keiner Fläche des Tetraeders liegt, eine Ebene E_1, welche durch keinen Eckpunkt desselben geht, als Polare jenes Punktes nach Belieben annehmen, wodurch aber alsdann nach 133 und 326 ein Polarsystem bestimmt ist. Durch die vier Flächen des Polartetraeders ABCD wird der unbegrenzte Raum in acht Tetraeder getheilt, deren jedes von vier Dreiecken eingeschlossen ist. Wenn nun das Tetraeder ABCD, welches den Punkt E in sich enthält, von der Ebene E_1 nicht geschnitten wird, so ist jedes der acht Tetraeder dem von seiner Oberfläche ausgeschlossenen Systeme von Ebenen zugeordnet, daher alsdann kein Punkt in seiner Polare liegt. Wird aber das Tetraeder ABCD von der Ebene E_1 geschnitten, so hat man folgende zwei Fälle zu unterscheiden:

I. Wenn die Ebene E_1 nur drei Kanten AB, AC, AD des Tetraeders ABCD schneidet und also von der Oberfläche des Tetraeders BCD·A ausgeschlossen ist, so ist jedem der acht Tetraeder ein System von Ebenen zugeordnet, welches von einem der übrigen Tetraeder ausgeschlossen ist, so dass je zwei solche zusammengehörige Tetraeder drei in der Ebene BCD befindliche Kanten mit einander gemein haben, während die übrigen Kanten des einen von den übrigen Kanten des andern die Ergänzungen sind. Da hiernach kein Punkt der Ebene BCD in seiner Polare liegt, so gibt es auch keine sich selbst zugeordnete Gerade und mithin (324) in keiner Ebene, welche durch ihren Pol geht, noch einen sich selbst conjugirten Punkt. Da aber jede Strecke, welche den Punkt A mit einem Punkte der Ebene BCD verbindet, in dem ihr zugeordneten Winkel liegt, so giebt es (323) in jeder durch den Punkt A gehenden Geraden zwei sich selbst conjugirte Punkte.

II. Wenn die Ebene E vier Kanten AB, BC, CD, DA des Tetraeders ABCD schneidet, also von der Oberfläche des Tetraeders AC·BD ausgeschlossen ist, so ist jedem der acht Tetraeder ein System von Ebenen zugeordnet, welches von einem der übrigen Tetraeder ausgeschlossen ist, so dass je zwei solche zusammengehörige Tetraeder zwei in den Geraden AC, BD liegende Kanten mit einander gemein haben, während die übrigen Kanten des einen von den übrigen Kanten des andern die Ergänzungen sind. Da hiernach jede Strecke, welche einen Punkt der Geraden AC mit einem Punkte der Geraden BD verbindet, in dem ihr zugeordneten Winkel liegt, so gibt es in jeder Geraden, welche die beiden Geraden AC, BD schneidet, zwei sich selbst conjugirte Punkte. Da ferner (318) jede Gerade, welche einen sich selbst conjugirten Punkt der Geraden AB mit einem sich selbst conjugirten Punkt der Geraden CD verbindet, sich selbst zugeordnet ist, folglich jede Ebene mehr als einen sich selbst conjugirten Punkt enthält, so schneiden sich (324) in jedem Punkte, welcher in seiner Polare liegt, zwei sich selbst zugeordnete Gerade.

---

§ 25.

Flächen II. Ordnung.

328. Wenn irgend ein Punkt P eines gewöhnlichen Polarsystems in seiner Polare P_1 liegt, so hat das System eine Ordnungsfläche F, welche nämlich dem ihr sich anschmiegenden Ebenenbündel zugeordnet ist, so dass jeder Punkt der Fläche in seiner Polare liegt, die in ihm der Fläche sich anschmiegt, jeder Punkt aber, welcher der Fläche nicht angehört, auch ausserhalb seiner Polare liegt. Ist keine Gerade des Polarsystems sich selbst zugeordnet, so soll die Fläche F eine gewöhnliche Fläche II. Ordnung heissen. Wenn aber in jedem Punkte P, welcher in seiner Polare P_1 liegt, zwei sich selbst zugeordnete Gerade p, a sich schneiden, so ist die Fläche F eine Regelfläche II. Ordnung.

Eine gewöhnliche Fläche II. Ordnung F wird (328) in jedem in ihr befindlichen Punkte von der Polare dieses Punktes berührt, von jeder andern Ebene aber (322), welche durch denselben Punkt

geht, in einer Curve II. Ordnung geschnitten, daher die Fläche mit keiner Geraden mehr als zwei Punkte gemein hat. Dem von der Fläche eingeschlossenen Körper K, welcher von jedem Polartetraeder einen Eckpunkt enthält, ist das von ihr ausgeschlossene System von Ebenen zugeordnet, welches von jedem Polartetraeder eine Fläche enthält. Jeder ausserhalb des Körpers K befindliche Punkt S ist der Mittelpunkt eines um ihn beschriebenen Strahlenkegels, dessen Mantel die Fläche F in der Curve s berührt, in welcher dieselbe von der Polare jenes Punktes geschnitten wird. Beschreibt der Punkt S eine Gerade a oder das ausserhalb des Körpers K befindliche Stück einer Geraden a, so beschreibt die Curve s, indem ihre Ebene um die Polare a_1 jener Geraden sich dreht, die Fläche F und die von der Curve s eingeschlossene Figur den Körper K. Liegen zwei einander zugeordnete Gerade nicht in einerlei Ebene, so ist die eine die Axe eines um den Körper K beschriebenen Flächenwinkels, welcher der ausserhalb des Körpers liegenden Strecke der andern zugeordnet ist. Wenn aber zwei einander zugeordnete Gerade sich schneiden, so berühren sie in ihrem Schnittpunkte die Fläche F.

Eine Regelfläche II. Ordnung wird von jeder Ebene P_1, welche durch ihren Pol P geht, obgleich die Ebene der Fläche in diesem Punkte sich anschmiegt, in zwei Geraden p, a, von jeder andern Ebene aber in einer Curve II. Ordnung geschnitten. Beschreibt der Punkt P das gerade Gebilde p und also die Ebene P_1 den Ebenenbüschel p, so beschreibt die Gerade a die Ordnungsfläche F des Polarsystems, welche jeden sich selbst conjugirten Punkt enthält und den unbegrenzten Raum in zwei Theile theilt, von welchen der eine vom Winkel pa und der andere vom Winkel p·a beschrieben wird. Da aber in einem solchen Polarsysteme jeder sich selbst conjugirte Punkt der Schnittpunkt von zwei sich selbst zugeordneten Geraden ist, so wird die Fläche F noch von einer andern Schaar der Geraden erfüllt, so dass in jedem Punkte derselben eine Gerade der einen Schaar und eine Gerade der andern Schaar sich schneiden. Jedes Polartetraeder hat vier Kanten, welche die Fläche F schneiden; die beiden übrigen Kanten, welche mit der Fläche keinen Punkt gemein haben, sind durch dieselbe getrennt. Jeder Punkt S, welcher nicht in

der Fläche F liegt, ist der Mittelpunkt eines Strahlenkegels, dessen Mantel die Fläche F in der Curve s berührt, in welcher dieselbe von der Polare jenes Punktes geschnitten wird. Jede Ebene, welche die Kegelfläche S in einem Strahle h berührt und also auch durch eine Tangente h_1 der Curve s geht, schneidet die Fläche F in zwei Geraden, welche durch die einander zugeordneten Geraden h, h_1 harmonisch getrennt sind. Jede Ebene, welche die Kegelfläche S in zwei Geraden und also den Strahlenkegel S in einem Winkel schneidet, schneidet die Fläche F in einer Curve, welche in den Nebenwinkel jenes Winkels beschrieben ist. Wenn endlich eine durch den Punkt S gehende Ebene mit der Kegelfläche S gar keinen Strahl gemein hat, so schneidet sie die Fläche F in einer Curve, welche jenen Punkt einschliesst.

329. Jede Regelfläche F, welche noch von einer andern Schaar von Geraden erfüllt wird, ist eine Regelfläche II. Ordnung.

Es seien a, b, c drei Gerade der einen Schaar und p, q, r drei Gerade der andern Schaar. Bezieht man nun zwei räumliche Systeme projektivisch so aufeinander, dass den Punkten ap, aq, bp, bq, cr des einen die Ebenen ap, aq, bp, bq, cr des andern entsprechen, so haben die beiden Systeme die Gerade a, welche den Punkt ap mit dem Punkte aq verbindet und zugleich die Schnittlinie der Ebenen ap, aq ist, und eben so die Geraden b, p, q entsprechend gemein. Da ferner der Geraden c, welche die Geraden p, q schneidet und durch den Punkt cr geht eine Gerade entsprechen muss, welche die Geraden p, q schneidet und in der Ebene cr liegt, demnach die Systeme auch die Gerade c und eben so die Gerade r entsprechend gemein haben, so entsprechen den Ebenen ap, aq, bp, bq, cr des erstern Systems die Punkte ap, aq, bp, bq, cr des letztern, woraus man (133) schliessen kann, dass je zwei homologe Elemente einander doppelt entsprechen und dass die Fläche F die Ordnungsfläche des Polarsystems sei.

Zwei einander zugeordnete Gerade h, h_1, welche sich schneiden, berühren (328) in ihrem Schnittpunkte die Fläche F auf entgegengesetzten Seiten. Wenn aber zwei einander zugeordnete Gerade nicht in einerlei Ebene liegen, so hat die Fläche F entweder mit

keiner von den beiden Geraden einen Punkt gemein oder sie wird von jeder derselben in zwei Punkten geschnitten. Der Geraden, welche den Punkt ap mit dem Punkte bq verbindet, ist die Schnittlinie der Ebenen ap, bq zugeordnet, welche durch die Punkte bp, aq geht.

330. Eine gewöhnliche Fläche II. Ordnung F oder auch der von ihr eingeschlossene Körper K heisst ein Ellipsoid oder ein elliptisches Paraboloid oder ein zweischaliges Hyperboloid, je nachdem die Fläche F mit der unendlich fernen Ebene gar keinen Punkt gemein hat oder diese Ebene in einem Punkte berührt oder in einer Curve s schneidet, oder, was dasselbe ist, je nachdem der Pol M der unendlich fernen Ebene in dem Körper K oder in seiner Oberfläche oder ausserhalb desselben liegt. Im letzten Fall ist der Punkt M der Mittelpunkt des Assymptotenkegels, dessen Mantel nämlich die Fläche F in der unendlich fernen Curve s berührt.

Eine Regelfläche II. Ordnung F heisst ein hyperbolisches Paraboloid oder ein einschaliges Hyperboloid, je nachdem sie die unendlich ferne Ebene in zwei Geraden oder in einer Curve II. Ordnung schneidet. Im erstern Falle sind die Richtungen von allen Geraden einer und derselben Schaar in der Stellung enthalten, in welcher die unendlich ferne Gerade der andern Schaar liegt. Im letztern Falle ist der Pol der unendlich fernen Ebene der Mittelpunkt des Assymptotenkegels, dessen Mantel nämlich (auf seiner äussern Seite) von der Fläche F in jener unendlich fernen Curve berührt wird.

Anm. Wird eine Fläche II. Ordnung nicht ausdrücklich eine Kegelfläche genannt, so ist gewöhnlich eine andere Fläche II. Ordnung (die Ordnungsfläche eines räumlichen Polarsystems) gemeint.

331. Da in jeder Geraden, welche eine Fläche II. Ordnung in zwei Punkten schneidet, diese Punkte durch je zwei einander conjugirte Punkte harmonisch getrennt sind, so kann man die Punkte der Fläche auf unendlich viele Arten involutorisch paaren. Man darf nur entweder irgend eine Ebene U, welche nicht durch ihren Pol geht, als Ordnungsebene und ihren Pol S als Ordnungspunkt, oder irgend zwei einander zugeordnete Gerade s, u, wel-

che nicht in einerlei Ebene liegen, als Ordnungslinien annehmen. Im erstern Falle sind je zwei einander zugeordnete Punkte der Fläche durch den Punkt S und einen Punkt der Ebene U, in letztern Falle aber durch einen Punkt der Geraden s und einen Punkt der Geraden u harmonisch getrennt.

332. Es sind eine Kegelfläche II. Ordnung, eine Ebene U, welche die Kegelfläche in einer Curve s schneidet, und ein Punkt A, welcher weder in dieser Ebene noch in der Kegelfläche liegt, gegeben; man soll eine Fläche II. Ordnung finden, welche die gegebene Kegelfläche in der gegebenen Curve s berührt und überdiess durch den gegebenen Punkt A geht.

Es werde die Ebene U von der Geraden, welche den Mittelpunkt S der gegebenen Kegelfläche mit dem Punkte A verbindet in dem Punkte P geschnitten. Es sei ferner LMN in Hinsicht auf die Curve s ein Polardreieck, von dessen drei Eckpunkten keiner in der Polare p des Punktes P liegt. Wenn nun das Tetraeder LMNS als Polartetraeder angenommen und dem Punkte A die Ebene Ap zugeordnet wird, so ist dadurch ein Polarsystem bestimmt, dessen Ordnungsfläche F die gegebene Kegelfläche in der gegebenen Curve berührt und durch den gegebenen Punkt A geht.

Die Gerade SP schneidet die Fläche F in dem Punkte A und in dem Punkte B, welcher zu den drei Punkten S, A, P der vierte harmonische Punkt ist. Schneiden zwei Gerade, von welchen die eine durch den Punkt A und die andere durch den Punkt B geht, die Ebene U in zwei einander conjugirten Punkten, welche mit dem Punkte P in einer Geraden liegen, so schneiden sie sich selbst (254) in einem Punkte der Fläche F. Ist statt des Punktes A der gesuchten Fläche eine ihr sich anschmiegende Ebene A_1 gegeben, welche nicht durch den Punkt S geht und die Ebene U in einer sich nicht selbst conjugirten Geraden p schneidet, so findet man den Pol A der Ebene A_1, wenn man auf dieselbe den Pol P der Geraden p aus dem Punkte S projicirt.

Die Kegelfläche und die gegebene Curve können auch imaginär sein. Wenn nämlich ein ebenes Polarsystem U, welches in einem räumlichen Polarsysteme enthalten ist, keine (reele) Ordnungscurve hat, so sagt man, dass die Ordnungsfläche des letz-

tern Systems die Ebene U in der imaginären Ordnungscurve des erstern schneide und in dieser Curve die imaginäre Kegelfläche berühre, welche dieselbe aus dem Pole S der Ebene U projicire.

333. Eine Fläche II. Ordnung zu finden, welche durch eine gegebene Curve II. Ordnung s und durch die vier Eckpunkte eines gegebenen Tetraeders ABCD gehe, von welchen keiner in der Ebene U der gegebenen Curve liegt.

Eine Fläche II. Ordnung zu finden, welche eine gegebene Kegelfläche II. Ordnung in einer Curve berühre und den vier Flächen eines gegebenen Tetraeders sich anschmiege, von welcher keine durch den Mittelpunkt der gegebenen Kegelfläche geht.

Es werde die Ebene U von den Geraden AB, AC, AD in den Punkten P, Q, R geschnitten, deren Polaren in Hinsicht auf die gegebene Curve die Geraden p, q, r seien. Sucht man nun in den Geraden AB, AC, AD die Punkte P_1, Q_1, R_1, so dass $APBP_1$, $AQCQ_1$, $ARDR_1$ harmonische Gebilde sind, so schneiden sich die Ebenen P_1p, Q_1q, R_1r in dem Mittelpunkte S der Kegelfläche, welche die gesuchte Fläche in der gegebenen Curve berührt. Liegt nämlich der Punkt A nicht in der Kegelfläche S, welche aus dem Schnittpunkte S die Curve s projicirt, so kann man nach 332 eine Fläche II. Ordnung F finden, welche die Kegelfläche S in der Curve s berührt und durch den Punkt A geht. Da nun in Hinsicht auf die Fläche F der Punkt P der Pol der Ebene Sp, also dem Punkte P_1 conjugirt und $APBP_1$ ein harmonisches Gebilde ist, so geht die Fläche F auch durch den Punkt B und eben so durch die Punkte C, D. Liegt aber der Punkt A in der Kegelfläche S, so geht diese auch durch die Punkte B, C, D und ist also selbst die gesuchte Fläche.

334. Es sind ein Tetraeder ABCD und eine Curve II. Ordnung s gegeben, welche entweder mit keiner Fläche des Tetraeders einen Punkt gemein hat oder von jeder dieser vier Ebenen geschnitten wird, man soll eine Fläche II. Ordnung finden, wel-

Es sind eine Kegelfläche II. Ordnung und ein Tetraeder gegeben, dessen Eckpunkte entweder alle vier in dem von der Kegelfläche eingeschlossenen Strahlenkegel oder alle vier ausserhalb desselben liegen; man soll eine Fläche II. Ordnung

che durch die gegebene Curve gehe und den vier Flächen des gegebenen Tetraeders sich anschmiege.

finden, welche die gegebene Kegelfläche in einer Curve berühre und durch die vier Eckpunkte des gegebenen Tetraeders gehe.

Man lege durch die Gerade AB die Ebenen p, p_1, durch die Gerade BC die Ebenen q, q_1 und durch die Gerade CA die Ebenen r, r_1, so dass von diesen sechs Ebenen je zwei, welche durch eine und dieselbe Kante des Tetraeders ABCD gehen, durch zwei Flächen desselben harmonisch getrennt sind und die Ebene U der gegebenen Curve s in zwei in Hinsicht auf diese Curve einander conjugirten Geraden schneiden. Wenn nun der Punkt pqr ausserhalb der Ebene U liegt, und also die Curve s aus dem Punkte pqr durch eine Kegelfläche S projicirt wird, so kann man (332) eine andere Fläche II. Ordnung F finden, welche die erwähnte Kegelfläche in der gegebenen Curve berührt und der Ebene ABC sich anschmiegt. Da aber die Geraden pU, p_1U in Hinsicht auf die Curve s, mithin die Ebenen p, p_1 in Hinsicht auf dte Kegelfläche S und folglich auch in Hinsicht auf die Fläche F einander conjugirt und durch die Ebenen ABC, ABD harmonisch getrennt sind, so muss die Fläche F auch der Ebene ABD und eben so den Ebenen BCD, CAD sich anschmiegen.

Was von dem Punkte pqr gesagt wurde, gilt von jedem Punkte, in welchem eine von den beiden Ebenen p, p_1, eine von den beiden Ebenen, q, q_1 und eine von den beiden Ebenen r, r_1 sich schneiden, so dass also, wenn diese acht Punkte ausserhalb der Ebene U liegen, die Aufgabe acht Auflösungen zulässt.

335. Es sind eine Fläche II. Ordnung und ein Tetraeder gegeben, von dessen vier Flächen keine jener Fläche sich anschmiegt und auch keine zwei durch den jener Fläche sich anschmiegenden Ebenenbündel getrennt sind; man soll eine Fläche II. Ordnung finden, welche die gegebene Fläche in einer

Es sind eine Fläche II. Ordnung G und ein Tetraeder ABCD gegeben, von dessen vier Eckpunkten keiner in jener Fläche liegt und auch keine zwei durch jene Fläche getrennt sind; man soll eine Fläche II. Ordnung finden, welche die gegebene Fläche in einer Curve berühre und durch die vier

Curve berühre und den vier Flächen des gegebenen Tetraeders sich anschmiege.

Eckpunkte des gegebenen Tetraeders gehe.

Man suche in der Geraden AB die Punkte P, P_1, in der Geraden AC die Punkte Q, Q_1 und in der Geraden AD die Punkte R, R_1, so dass von diesen sechs Punkten je zwei, welche in einer und derselben Kante des Tetraeders ABCD liegen, durch zwei Eckpunkte desselben harmonisch getrennt und in Hinsicht auf die Fläche G einander conjugirt sind. Wenn die Fläche G von einer Kegelfläche berührt wird, so kann man (332) eine Fläche II. Ordnung F finden, welche diese Kegelfläche und also auch die Fläche G in jener Curve berührt und durch den Punkt A geht. Da aber die Polare eines jeden in der Fbene PQR befindlichen Punktes in Hinsicht auf die beiden Flächen G, F dieselbe ist, und also den Punkten P, Q, R die Punkte P_1, Q_1, R_1 auch in Hinsicht auf die Fläche F conjugirt sind, so geht diese auch durch die Punkte B, C, D. — Was von der Ebene PQR gesagt wurde, gilt von jeder Ebene, welche durch einen von den beiden Punkten P, P_1, einen von den beiden Punkten Q, Q_1 und einen von den beiden Punkten R, R_1 geht.

Anhang.

336. Gleichwie Affinität ein besonderer Fall von collincärer Verwandschaft ist, so ist Aehnlichkeit ein besonderer Fall von Affinität und Congruenz ein besonderer Fall von Aehnlichkeit. In ähnlichen Systemen sind je zwei homologe Winkel, in congruenten Systemen auch je zwei homologe Strecken einander gleich. Zwei zu einander projektivische Gerade sind ähnlich, wenn dem unendlich fernen Punkte der einen Geraden der unendlich ferne Punkt der andern entspricht. Ist überdiess irgend eine endliche Strecke in der einen Geraden der ihr entsprechenden Strecke in der andern gleich, so sind die Gebilde congruent.

Will man zwei ebene Systeme so auf einander beziehen, dass sie ähnlich sind, so kann man zu zwei eigentlichen Punkten A, B der einen Ebene zwei solche Punkte A_1, B_1 der andern Ebene,

welche jenen entsprechen sollen, nach Belieben annehmen. Es ist alsdann nur noch festzusetzen, welche von beiden Seiten der Geraden $A_1 B_1$ einer bestimmten Seite der Geraden AB entsprechen soll. Sind die unendlichen Strecken AB, $A_1 B_1$ einander gleich, so werden die Systeme congruent.

337. Zwei congruente Strahlenbüschel, welche in einerlei Ebene, aber weder perspektivisch liegen noch concentrisch sind, erzeugen entweder einen Kreis oder eine Hyperbel, deren Assymptoten zu einander senkrecht sind. — Wenn in einer Ebene der Mittelpunkt eines Winkels, ohne dass dieser seine Grösse ändert, in einer festen Geraden sich bewegt, während der eine Schenkel um einen festen (eigentlichen) Punkt sich dreht, so beschreibt der andere Schenkel einen parabolischen Strahlenbüschel. Der Mittelpunkt des Winkels und der unendlich ferne Punkt des andern Schenkels sind nämlich homologe Punkte von zwei zu einander projektivischen geraden Gebilden, welche Schnitte von zwei congruenten Strahlenbüscheln sind.

338. Wenn man in einer Geraden einen Punkt als Mittelpunkt annimmt und je zwei Punkte, welche von ihm gleichweit abstehen, einander zugeordnet nennt, so sind die Punkte der Geraden involutorisch so gepaart, dass je zwei einander zugeordnete Strecken einander gleich sind. Der Mittelpunkt und der unendlich ferne Punkt sind die Ordnungspunkte eines solchen involutorischen Gebildes, welches centrisch oder auch symmetrisch genannt werden kann. In einer eigentlichen Geraden ist hiernach der unendlich ferne Punkt von jedem Punkte durch je zwei Punkte, welche von diesem gleichweit abstehen, harmonisch getrennt.

Die drei Geraden, welche die Eckpunkte eines endlichen Dreiecks mit den Mittelpunkten der ihnen gegenüberliegenden Seiten verbinden, schneiden sich (102) in einem Punkte. — Die beiden Punkte, in welchen die Assymptoten einer Hyperbel von einer dritten Tangente derselben geschnitten werden, stehen (250) vom Berührungspunkte dieser Tangente gleichweit ab.

339. Sind in einem involutorischen Strahlenbüschel je zwei einander zugeordnete Winkel einander gleich, so hat der Büschel entweder zwei zu einander senkrechte Ordnungsstrahlen (Axen), oder es sind je zwei einander zugeordnete Strahlen zu einander

senkrecht. Im erstern Falle soll der Büschel symmetrisch, im letztern aber rechtwinklig heissen.

Nennt man in einer unendlich fernen Geraden je zwei Punkte, welche in zwei zu einander senkrechten Richtungen liegen, einander zugeordnet, so sind die Elemente des geraden Gebildes involutorisch gepaart. Wenn daher zwei Seiten eines vollständigen ebenen Vierecks, welche in einem Eckpunkte desselben sich schneiden, zu den ihnen gegenüberliegenden Seiten beziehlich senkrecht sind, so sind auch (222) die beiden übrigen Seiten zu einander senkrecht.

340. Will man die Elemente eines ebenen Systems involutorisch so paaren, dass je zwei einander zugeordnete Gebilde congruent sind, so darf man nur entweder einen Punkt als Mittelpunkt oder eine Gerade als Axe (Symmetrallinie) annehmen. Im erstern Falle sind je zwei Punkte, welche vom Mittelpunkte gleichweit abstehen und mit ihm in einer und derselben Geraden liegen im letztern aber je zwei Punkte, welche von der Axe gleichweit abstehen und in einer zu ihr senkrechten Geraden liegen, einander zugeordnet. In einem centrischen ebenen Systeme ist also die Ordnungslinie die unendlich ferne Gerade, daher je zwei einander zugeordnete Gerade parallel sind und vom Mittelpunkte gleichweit abstehen. In einem symmetrischen ebenen Systeme ist der Ordnungspunkt der unendlich ferne Punkt, welcher in der zur Axe (Ordnungslinie) senkrechten Richtung liegt, daher je zwei einander zugeordnete Gerade einen Winkel einschliessen, welcher durch die Axe halbirt wird.

341. In einem ebenen Polarsysteme heisst jede Gerade, welche der unendlich fernen Geraden, aber nicht sich selbst conjugirt ist, ein Durchmesser und der Richtung zugeordnet, in welcher ihr unendlich ferner Pol liegt. Jeder Durchmesser einer Curve II. Ordnung halbirt also (249) jede endliche Strecke, welche die ihm zugeordnete Richtung hat und von zwei Punkten der Curve begrenzt ist. — Alle Durchmesser einer Parabel sind zu einander parallel und mithin zu einer und derselben Richtung senkrecht, welcher die Axe der Parabel zugeordnet ist.

342. Alle Durchmesser einer Ellipse oder Hyperbel schneiden sich in ihrem Mittelpunkte (dem Pole der unendlich fernen Gera-

den), welcher von je zwei Punkten der Curve, die mit ihm in einer und derselben Geraden liegen, gleichweit absteht. Wenn nun je zwei conjugirte Durchmesser, von welchen also jeder der Richtung des andern zugeordnet ist, zu einander senkrecht sind, folglich jeder Durchmesser eine Axe ist, so ist die Curve, da alle Punkte derselben vom Mittelpunkte gleichweit abstehen, ein Kreis. Wenn aber diess nicht der Fall ist, so hat die Curve (313) zwei Axen, nämlich zwei Durchmesser, welche einander conjugirt und zugleich zu einander senkrecht sind.

Man nehme an, dass den Durchmessern MA, MB die Durchmesser MA_1, MB_1 conjugirt, und dass M, A, B, A_1, B_1 die Punkte sind, in welchen die vier Durchmesser von einem durch den Mittelpunkt der Curve gelegten Kreise geschnitten werden, so erhält man (278) die Axen der Curve, wenn man aus dem Punkte M diejenigen Punkte des Kreises projicirt, welche mit seinem Mittelpunkte und dem Schnittpunkte der Geraden AB_1, A_1B in einer und derselben Geraden liegen.

Die Hauptaxe einer Hyperbel halbirt den Assymtotenwinkel und schneidet die Curve in ihren beiden Scheitelpunkten. Eine Ellipse hat vier Scheitelpunkte und schliesst von ihrer Hauptaxe ein grösseres Stück ein, als von der andern Axe.

343. Die Mittelpunkte von allen Curven II. Ordnung, welche die vier Seiten eines gegebenen vollständigen Vierseits berühren, liegen in einer Geraden, welche (302) jede von zwei Gegenpunkten des vollständigen Vierseits begrenzte endliche Strecke halbirt.

Schneiden sich je zwei Gegenseiten eines vollständigen Vierecks in einem eigentlichen Punkte, so liegen (303) diese drei Punkte mit den Mittelpunkten der endlichen Strecken, deren jede von zwei Eckpunkten des Vierecks begrenzt ist, in einer Curve II. Ordnung, welche von jeder durch die vier Eckpunkte des Vierecks gehenden Curve II. Ordnung den Mittelpunkt enthält. Sind je zwei Gegenseiten des Vierecks zu einander senkrecht, so ist jene Curve ein Kreis.

344. Wenn von einem Dreiecke, dessen Eckpunkte in einer gegebenen Curve II. Ordnung s liegen, ein Eckpunkt S gegeben ist und die in ihm sich schneidenden Seiten zu einander senkrecht

sind, so geht (278) die dritte Seite durch einen gegebenen Punkt H. Wenn aber die beiden Seiten, deren Schnittpunkt gegeben ist, einen schiefen Winkel von gegebener Grösse mit einander bilden, so berührt (281) die dritte Seite eine gegebene Curve II. Ordnung.

Ist die Curve s kein Kreis, so ist die Polare des Punktes H eine eigentliche Gerade h, zu welcher also eine durch den Punkt S gehende Gerade u parallel ist. Bezieht man nun zwei ebene Systeme collincär so aufeinander, dass sie den Strahlenbüschel S und das gerade Gebilde u entsprechend gemein haben und dass der Geraden h des einen die unendlich ferne Gerade des andern entspricht, so entspricht der Curve s des erstern ein Kreis des letztern, dessen Mittelpunkt M dem Punkte H entspricht. Man findet also den Mittelpunkt M des Kreises, welcher der Curve s im Punkte S am Innigsten sich anschmiegt, wenn man irgend einen von S verschiedenen eigentlichen Punkt F der Geraden u aus dem Punkte H auf die Gerade h projicirt, die Projektion G mit dem Punkt S verbindet und alsdann durch F eine zu GS parallele Gerade FM zieht.

345. Wenn a die Axe einer Parabel oder eine von den beiden Axen einer andern Curve II. Ordnung ist, welche nämlich nur zwei Axen hat, so gibt es in der Geraden a zu jedem eigentlichen Punkte P, welcher nicht der Pol der unendlich fernen Geraden ist, einen eigentlichen Punkt P_1, so dass je zwei einander conjugirte Gerade, von welchen die eine durch den Punkt P und die andere durch den Punkt P_1 geht, zu einander senkrecht sind. Nennt man je zwei solche Punkte einander zugeordnet, so sind die Punkte der Geraden a involutorisch gepaart.

Es sey R der Pol der Axe a, p eine Gerade welche diese Axe im Punkte P unter schiefen Winkeln schneidet, und P_1 der Punkt, in welchem die Axe a von der Geraden p_1 geschnitten wird, die durch den Pol der Geraden p geht und zu dieser Geraden senkrecht ist. Da nun drei Strahlen a, PR, p des Büschels P zu den ihnen conjugirten Strahlen P_1R, a, p_1 des Büschels P_1 senkrecht sind, so kann man aus 252 schliessen, dass jeder Strahl des einen Büschels zu dem ihm conjugirten Strahle des andern senkrecht ist. Da ferner auch die beiden Parallel-

strahlenbüschel, von welchen der eine die Richtung der Geraden p und der andere die Richtung der Geraden p_1 hat, wenn auf jeden Strahl des einen der ihm conjugirte Strahl des andern bezogen wird, zu einander projektivisch sind, demnach von der Axe a in zwei zu einander projektivischen geraden Gebilden geschnitten werden, und je zwei homologe Punkte dieser Gebilde einander doppelt entsprechen, so folgt auch der letztere Theil des Satzes.

Wenn die Curve eine Parabel ist und also die beiden Parallelstrahlenbüschel die unendlich ferne Gerade entsprechend gemein haben, so ist der unendlich ferne Punkt G des involutorischen geraden Gebildes a sich selbst zugeordnet, daher der andere Ordnungspunkt F derselben, welcher der Brennpunkt der Parabel heisst, von je zwei einander zugeordneten Punkten gleichweit absteht. Ist aber die Curve eine Ellipse oder Hyperbel, so enthält das erwähnte Gebilde, da dem unendlich fernen Punkte U desselben der Mittelpunkt M der Curve zugeordnet ist, entweder zwei von diesem Punkte gleichweit abstehende Ordnungspunkte (Brennpunkte) oder gar keinen Ordnungspunkt, je nachdem die Gerade a die Hauptaxe oder die andere Axe der Curve ist (je nachdem die Geraden p, p_1 durch die Punkte M, U nicht getrennt oder getrennt sind).

Schneiden sich also zwei zu einander senkrechte Gerade im Brennpunkte F einer Parabel oder in einem von den beiden Brennpunkten F, G einer Ellipse oder Hyperbel, welche nämlich mit ihnen in einerlei Ebene liegt, so sind sie in Hinsicht auf die Curve einander conjugirt. Dasselbe ist der Fall, wenn die zu einander senkrechten Gerade SP, SP_1 durch die Punkte F, G harmonisch getrennt sind und also die von den beiden Geraden SF, SG eingeschlossenen Winkel halbiren. Liegt der Punkt S in der Curve, so ist die eine von den beiden Geraden SP, SP_1 eine Tangente derselben. Wenn aber im Punkte S zwei Tangenten der Curve sich schneiden, so werden auch die Winkel, welche diese Tangenten mit einander bilden, durch die Geraden SP, SP_1 halbirt.

346. Die $\left\{\begin{matrix}\text{Summe}\\ \text{Differenz}\end{matrix}\right\}$ von je zwei endlichen Strecken FS, GS,

welche die Brennpunkte einer $\left\{\begin{matrix}\text{Ellipse}\\\text{Hyperbel}\end{matrix}\right\}$ mit einem Punkte der Curve verbinden, ist dem von derselben $\left\{\begin{matrix}\text{ein}\\\text{aus}\end{matrix}\right\}$ geschlossenem Stücke AB der Hauptaxe gleich. Jeder Punkt einer Parabel steht von ihrem Brennpunkte und der Polare dieses Punktes gleichweit ab.

Es wird hinreichend seyn, denjenigen von den obigen Sätzen zu beweisen, welcher auf eine Ellipse sich bezieht. Die Tangenten ST, BT bilden nach dem Vorigen einen Winkel, welcher durch die Geraden FT, GT in drei Theile α, β, γ getheilt wird, so dass $\alpha=\gamma$ und also $\alpha+\beta=\beta+\gamma$ ist. Man schneide nun in der Geraden AB vom Punkte B aus ein Stück $BJ=BG$ ab, so ist auch $TJ=TG$ und $FJ=FB+BG=FB+FA=AB$. Es werde ferner die Gerade FS von der Geraden, welche durch den Brennpunkt G geht und zur Tangente ST senkrecht ist, im Punkte K geschnitten, so ist, weil die geraden Linien SG, SK mit der Tangente ST gleiche Winkel bilden, $SG=SK$ und also auch $TG=TK$. Da endlich in dem Vierecke TJFK die Seiten TJ, TK einander gleich sind und der Winkel am Punkte T durch die Diagonale TF in zwei gleiche Theile $(2\alpha+\beta=2\gamma+\beta)$ getheilt wird, so ist auch $FK=FJ$ d. i. $FS+GS=AB$.

347. Drei Gerade, welche in drei eigentlichen Punkten sich schneiden, bilden mit einander sechs Winkel, deren Halbirungslinien die Seiten eines vollständigen Vierecks sind. Die Eckpunkte dieses Vierecks sind die Mittelpunkte von vier Kreisen, deren jeder jene drei Geraden berührt. Hieher gehört auch (316) die erste von den drei folgenden Aufgaben, während die beiden übrigen besondere Fälle von 315 sind.

Eine Curve II. Ordnung zu finden, welche durch die drei Eckpunkte eines gegebenen Dreiecks gehe und einen vierten in derselben Ebene gegebenen Punkt zum Brennpunkte habe. — Um ein gegebenes endliches Dreieck einen Kreis zu beschreiben. — In ein gegebenes Dreieck eine Curve II. Ordnung zu beschreiben, welche einen innerhalb des Dreiecks gegebenen Punkt zum Brennpunkt habe.

348. Will man die Elemente eines räumlichen Systems involutorisch so paaren, dass je zwei einander zugeordnete einförmig

Gebilde congruent sind, so darf man nur entweder die unendlich ferne Ebene als Ordnungsebene und einen eigentlichen Punkt M als Ordnungspunkt, oder eine eigentliche Ebene S als Ordnungsebene und den unendlich fernen Punkt, welcher in der zur Ebene S senkrechten Richtung liegt, als Ordnungspunkt, oder eine eigentliche Gerade a und die unendlich ferne Gerade, welche in der zur erstern senkrechten Stellung liegt, als Ordnungslinien annehmen. Im ersten Falle sind je zwei Punkte, welche mit dem Mittelpunkte M in einer Geraden liegen und von ihm gleichweit abstehen, im zweiten Falle je zwei Punkte, welche in einer zur Symmetralebene S senkrechten Geraden liegen und von der Ebene S gleichweit abstehen, im dritten Falle je zwei Punkte, welche in einer zur Axe a senkrechten Geraden liegen und von der Axe gleichweit abstehen, einander zugeordnet. Zwei einander zugeordnete Körper sind im ersten und zweiten Falle symmetrisch gleich, im dritten aber congruent.

349. Wird in einem gewöhnlichen Strahlenbündel jedem Strahle die zu ihm senkrechte Ebene zugeordnet, so soll derselbe rechtwinklig heissen. In einem solchen Polarsysteme sind also auch je zwei conjugirte Elemente zu einander senkrecht.

Sind in einem vollständigen Vierkante zwei einander nicht gegenüberliegende Seiten zu den ihnen gegenüberliegenden Seiten beziehlig senkrecht, so sind auch (244) die beiden übrigen Seiten zu einander senkrecht.

Sind in einem vollständigen Vierseite zwei einander nicht gegenüberliegende Kanten zu den ihnen gegenüberliegenden Kanten beziehlig senkrecht, so sind auch die beiden übrigen Kanten zu einander senkrecht.

350. Wenn zwei concentrische Strahlenbüschel in zwei Ebenen liegen, welche unter schiefen Winkeln sich schneiden, so ist zu jedem Strahle des einen Büschels ein Strahl des andern senkrecht. Nennt man je zwei solche Strahlen einander entsprechend, so sind (252) die Büschel projektivisch auf einander bezogen, daher die Ebenen, deren jede die Büschel in zwei zu einander senkrechten Strahlen schneidet, alle eine Kegelfläche II. Ordnung berühren. — Drehen sich zwei zu einander senkrechte Ebenen um zwei feste Axen, welche unter schiefen Winkeln sich schneiden, so beschreibt ihre Schnittlinie eine Kegelfläche II. Ordnung.

351. In einem gewöhnlichen polären Strahlenbündel, welcher eine Ordnungsfläche hat, ist jedem Strahle a, welcher nicht in dieser Fläche liegt, eine Ebene A zugeordnet, so dass die Mittelpunkte von allen endlichen Strecken, deren jede zu der Geraden a parallel und von zwei Punkten der Kegelfläche begrenzt ist, in der Ebene A, die Mittelpunkte von allen Curven aber, in welchen die Kegelfläche von den zur Ebene A parallelen Ebenen geschnitten wird, in der Geraden a liegen. Sind die Elemente a, A zu einander senkrecht, so ist die Gerade a eine Axe und die Ebene A eine Symmetralebene der Kegelfläche. Hat der poläre Strahlenbündel mit dem rechtwinkligen Strahlenbündel, der mit ihm concentrisch ist, nur (295) ein Polardreikant gemein, so hat die Kegelfläche nur drei Axen, von welchen die eine a (die Hauptaxe) von der Fläche eingeschlossen ist. Wenn aber jeder Ebene des Ebenenbüschels a in Hinsicht auf beide Polarsysteme ein und derselbe Strahl zugeordnet ist (die Kegelfläche die imaginäre Ordnungsfläche des rechtwinkligen Polarsystems in zwei imaginären Strahlen berührt), so ist die Kegelfläche eine Drehungsfläche, welche nämlich von jeder zu ihrer Hauptaxe senkrechten Ebene in einem Kreise geschnitten wird.

352. Die drei Seiten eines gewöhnlichen Dreikants bilden mit einander sechs Flächenwinkel, deren Halbirungsebenen die Seiten eines vollständigen Vierkants sind. Jede Kante dieses Vierkants ist die Axe eines Drehungskegels, dessen Mantel die drei Seiten des Dreikants berührt. 317.

Die drei Kanten eines gewöhnlichen Dreikants bilden mit einander sechs ebene Winkel, deren Halbirungslinien die Kanten eines vollständigen Vierseits sind. Jede Seite dieses Vierseits ist zur Axe eines Drehungskegels senkrecht, dessen Mantel durch die drei Kanten des Dreikants geht.

353. Wenn eine Kegelfläche II. Ordnung nur drei Axen a, b, c hat und also auch in der Hauptaxe a nur zwei Symmetralebenen sich schneiden, so schliesst die Fläche von der einen a b dieser Ebenen einen grössern Winkel A B ein als von der andern, dagegen dem Schnitte des Strahlenkegels mit der Ebene a c ein grösserer Flächenwinkel W zugeordnet ist. Der Winkel A B enthält

zwei Strahlen F, G, der Winkel W aber zwei Ebenen H, J, von welchen Folgendes gilt:

Je zwei Ebenen, welche in Hinsicht auf die Kegelfläche einander conjugirt sind und in einer von den beiden Geraden F, G sich schneiden, sind zu einander senkrecht. Die ebenen Winkel FG, F·G werden aus jeder Geraden S, welche durch den Mittelpunkt der Kegelfläche geht, aber ausserhalb der Ebene FG liegt, durch zwei Flächenwinkel projicirt, deren Halbirungsebenen zu einander senkrecht und einander conjugirt sind, folglich, wenn in der Geraden S zwei Berührungsebenen der Kegelfläche sich schneiden, auch die von diesen Ebenen gebildeten Winkel halbiren. Liegt aber die Gerade S in der Kegelfläche, so wird diese von der einen der erwähnten Halbirungsebenen berührt. Ferner ist alsdann die Summe der innerhalb des Strahlenkegels befindlichen ebenen Winkel FS, GS dem Winkel AB gleich.

Je zwei Gerade, welche in Hinsicht auf die Kegelfläche einander conjugirt sind und in einer von den beiden Ebenen H, J liegen, sind zu einander senkrecht. Die Flächenwinkel H, J H·J werden von jeder Ebene U, welche durch den Mittelpunkt der Kegelfläche aber nicht durch die Axe b geht, in zwei ebenen Winkeln geschnitten, deren Halbirungslinien zu einander senkrecht und einander conjugirt sind, folglich, wenn die Ebene U die Kegelfläche in zwei Strahlen schneidet, auch die von diesen Geraden gebildeten Winkel halbiren. Wird aber die Kegelfläche von der Ebene U berührt, so ist der Berührungsstrahl die eine von den erwähnten Halbirungslinien. Ferner ist alsdann die Summe der von der Kegelfläche ausgeschlossenen Flächenwinkel HU, JU dem Winkel W gleich.

Die Beweise dieser Sätze sind denen von 345 und 346 ganz analog, daher nur noch bemerkt wird, dass die Kegelfläche von jeder zu H oder J parallelen Ebene in einem Kreise geschnitten wird.

354. In einem räumlichen Polarsysteme wird jede Ebene, welche einem nicht in ihr liegenden unendlich fernen Punkte zugeordnet ist, eine Diametralebene, jede Gerade aber, welche einer mit ihr nicht in einerlei Ebene liegenden unendlich fernen Geraden

zugeordnet ist, ein Durchmesser genannt. Jede Diametralebene halbirt also jede endliche Strecke, welche die ihr zugeordnete Richtung hat und von zwei Punkten der Ordnungsfläche F begrenzt ist. Jeder Durchmesser enthält den Mittelpunkt einer jeden Curve, in welcher die Fläche F von einer ihm conjugirten Ebene geschnitten wird. Ist F ein Paraboloid, so sind alle Durchmesser zu einander parallel und also zu einer und derselben Stellung senkrecht, welcher die Axe des Paraboloids zugeordnet ist. Wenn ferner jede durch die Axe a gehende Ebene eine Symmetralebene (zu der ihr zugeordneten Richtung senkrecht) ist, so ist die Fläche F ein (elliptisches) Drehungsparaboloid. Enthält aber der Ebenenbüschel a nur zwei Ebenen, welche einander conjugirt und zugleich zu einander senkrecht sind, so enthalten diese von jeder Curve, in welcher die Fläche von einer zu ihrer Axe senkrechten Ebene geschnitten wird, die beiden Axen. Die erwähnten Symmetralebenen selbst schneiden die Fläche in zwei Parabeln, welche in ihrem gemeinschaftlichen Scheitelpunkte die in diesem Punkte zur Axe a senkrechte Ebene auf einerlei oder entgegengesetzten Seiten berühren, je nachdem das Paraboloid ein elliptisches oder hyperbolisches ist. Uebrigens wird das Paraboloid von jeder Diametralebene in einer Parabel geschnitten, in welcher demselben eine parabolische Cylinderfläche sich anschmiegt.

355. Alle Durchmesser und Diametralebenen eines Ellipsoids oder auch Hyperboloids gehen durch seinen Mittelpunkt, nämlich den Pol der unendlich fernen Ebene, welcher von je zwei Punkten der Fläche, die mit ihm in einer Geraden liegen, gleichweit absteht. Ist unter allen den Polardreikanten, deren jedes drei einander conjugirte Durchmesser zu Kanten hat, nur eines, dessen Kanten alle drei zu einander senkrecht sind, so hat die Fläche nur drei Axen und drei Symmetralebenen. Wenn aber ein Durchmesser a mit je zwei Durchmessern, die zu ihm und unter sich senkrecht sind, ein Polardreikant bildet, so ist die Fläche eine Drehungsfläche und jener Durchmesser die Drehungsaxe derselben. Wenn endlich jeder Durchmesser zu der ihm conjugirten Diametralebene senkrecht ist, so ist die Fläche, da alle Punkte derselben vom Mittelpunkte gleichweit abstehen, eine Kugelfläche.

356. Wenn ein Ellipsoid, welches nur drei Axen hat, von der

einen das Stück AB, von der andern das Stück CD und von der dritten das Stück EF einschliesst, so dass $AB > CD > EF$ ist, so wird die Fläche von der mit ihr concentrischen und durch die Punkte C, D gehenden Kugelfläche in zwei Kreisen geschnitten. Die Kugelfläche schneidet die Ebene AEBF in einem Kreise k, dieser Kreis aber die Ellipse AEBF in den vier Eckpunkten eines Rechtecks, dessen Diagonalen die zum Durchmesser CD senkrechten Durchmesser jener Kreise sind. Die gemeinschaftlichen Tangenten der Ellipse AEBF und des Kreises k bezeichnen die Richtungen von zwei um das Ellipsoid beschriebenen Drehungscylindern.

357. Jeder in einer Fläche II. Ordnung liegende Kreis s gehört einem Systeme von Parallelkreisen an, welche die Fläche erfüllen.

Es sey a derjenige Durchmesser der Fläche, welcher der Ebene E des Kreises s conjugirt ist. Da nun der in dem Polarsysteme enthaltene involutorische Ebenenbüschel a von der Ebene E und mithin auch von jeder zu dieser Ebene paralleien Ebene in einem rechtwinkligen Strahlenbüschel geschnitten wird, so folgt der Satz.

358. Jeder Durchmesser eines Hyperboloids ist der Diametralebene conjugirt, welche ihm in Hinsicht auf den Assymptotenkegel zugeordnet ist, daher die Axen des Assymptotenkegels zugleich die Axen des Hyperboloids sind. Ob eine Curve, in welcher das Hyperboloid von einer Ebene geschnitten wird, ein Kreis oder eine andere Ellipse oder eine Parabel oder eine Hyperbel sei, kann an der Curve erkannt werden, in welcher dieselbe Ebene oder eine zu ihr parallele Ebene den Assymptotenkegel schneidet.

Jede Ebene, welche den Assymptotenkegel eines einschaligen Hyperboloids in einer Geraden berührt, schneidet das Hyperboloid in zwei Geraden, welche zu jener Geraden parallel sind und von ihr gleichweit abstehen. Durch je drei Gerade, welche einer und derselben Schaar angehören, ist (48) ein Parallelepipedon bestimmt, dessen Mittelpunkt zugleich der Mittelpunkt des Hyperboloids ist. Zieht man zu jeder der drei Geraden eine Parallele, welche die beiden übrigen schneidet, so erhält man drei Parallelstreifen, deren Halbirungslinien in dem erwähnten Punkte sich schneiden.

359. Wird eine Curve II. Ordnung um ihre Hauptaxe gedreht, so erzeugt sie eine Fläche II. Ordnung S, welche zwei Brennpunkte F, G hat. Aus jedem dieser Punkte wird jede Curve s, in welcher die Fläche S von einer nicht durch ihn gehenden Ebene E geschnitten wird, durch eine Drehungsfläche K projicirt, deren Axe durch den Pol P jener Ebene geht.

In Hinsicht auf die Fläche S ist nämlich jeder durch den Punkt F gehenden Ebene Q ein Punkt Q_1 zugeordnet, welcher mit dem Punkte F in einer zur Ebene Q senkrechten Geraden FQ_1 liegt. Wenn nun die Ebene Q auch durch den Punkt P geht, folglich der Punkt Q_1 in der Ebene E liegt, so ist in Hinsicht auf die Curve s der Geraden EQ der Punkt Q_1, mithin in Hinsicht auf die Kegelfläche K jeder durch die Geraden FP gehenden Ebene Q eine zu dieser Ebene senkrechte Gerade FQ_1 zugeordnet.

360. Je zwei unendlich ferne $\left\{\begin{matrix}\text{Punkte}\\\text{Gerade}\end{matrix}\right\}$, welche in zwei zu einander senkrechten $\left\{\begin{matrix}\text{Richtungen}\\\text{Stellungen}\end{matrix}\right\}$ liegen, sind in Hinsicht auf die imaginäre Curve einander conjugirt, in welcher die unendlich ferne Ebene von allen Kugeln und den imaginären Ordnungsflächen aller rechtwinkligen Strahlenbündel geschnitten wird. Es heisst dies aber nichts anderes, als dass dasjenige unendlich ferne ebene Polarsystem, welches aus jedem eigentlichen Punkte durch einen rechtwinkligen Strahlenbündel projicirt wird, in jedem räumlichen Polarsysteme enthalten sei, dessen Ordnungsfläche eine Kugelfläche ist.

Durch vier gegebene eigentliche Punkte, welche nicht in einerlei Ebene liegen, eine Kugelfläche zu legen (eine Fläche II. Ordnung, welche durch die oben erwähnte imaginäre Curve gehe). 333.

Eine Kugel zu beschreiben, welche (334) die vier Flächen eines gegebenen Tetraeders ABCD

Eine Fläche II. Ordnung zu finden, welche die vier Flächen eines gegebenen Tetraeders berühre und einen ausserhalb dieser vier Ebenen gegebenen Brennpunkt habe.

Eine Fläche II. Ordnung zu finden, welche durch die vier Eckpunkte eines gegebenen Te-

berühre, von dessen sechs Kanten keine im Unendlichen liegt.— Die vier Flächen des Tetraeders bilden zwölf Flächenwinkel, deren Halbirungsebenen die Seiten von zwölf vollständigen Vierkanten sind. Die Mittelpunkte dieser Vierkante sind die vier Eckpunkte des Tetraeders und acht andere Punkte. Wenn nun M irgend einen der acht letztern Punkte bezeichnet, so kommt es darauf an, ob er im Unendlichen oder nicht im Unendlichen liegt. Im erstern Falle ist die Gerade DM die Axe eines Drehungskegels, welcher die Ebenen DAB, DAC, DBC und die durch den Punkt D gehende, zur Ebene ABC parallele Ebene P berührt. Im letztern Falle ist der Punkt M der Mittelpunkt einer Kugel, welche die vier Flächen des Tetraeders ABCD berührt. Die Aufgabe lässt daher fünf oder sechs oder sieben oder acht Auflösungen zu, je nachdem es drei oder zwei oder einen oder keinen Drehungskegel giebt, welcher die vier Ebenen DAB, DAC, DBC, P berührt.

traeders ABCD gehe und einen gegebenen Brennpunkt F habe, der in keiner Kante des Tetraeders liegt. — Die vier Geraden FA, FB, FC, FD bilden mit einander zwölf ebene Winkel, deren Halbirungslinien die Kanten des Tetraeders in den zwölf Eckpunkten von zwölf vollständigen Vierseiten schneiden. Die Träger dieser Vierseite sind die vier Flächen des Tetraeders und acht anderen Ebenen. Ist nun E irgend eine der acht letzteren Ebenen, so kommt es darauf an, ob sie durch den Punkt F oder nicht durch ihn geht. Im erstern Falle ist die Ebene E zur Axe eines Drehungskegels senkrecht, dessen Mantel durch die vier Geraden FA, FB, FC, FD geht. Im letztern Falle ist die Ebene E die Polare des Punktes F in Hinsicht auf eine Fläche, welche der Aufgabe Genüge leistet. Die Aufgabe lässt daher fünf oder sechs oder sieben oder acht Auflösungen zu, je nachdem es drei oder zwei oder einen oder keinen Drehungskegel giebt, dessen Mantel durch die vier Geraden FA, FB, FC, FD, geht.

Berichtigung.

In 277 ist $2n+1$ statt $n+1$ und $2n$ statt n zu lesen.

BINDING DEPT. DEC 10 1964

QA
471
S8
1847a

Staudt, Karl Georg
Christian von
Geometrie der lage

Physical &
Applied Sci.

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY